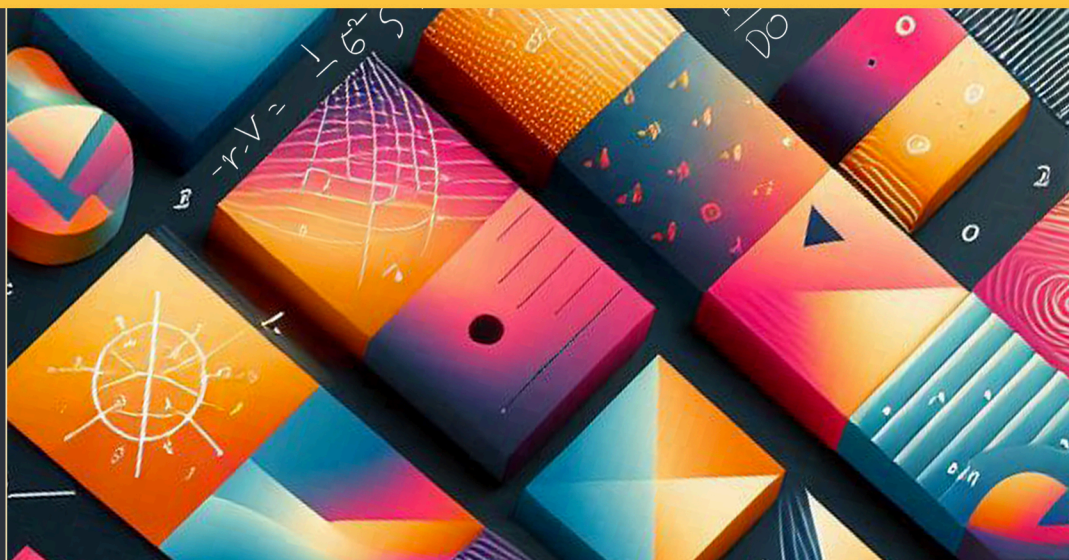




ÁLGEBRA UNIVERSITARIA

Carlos Jacob Rubio Barrios



UADY

UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
DE YUCATÁN

ALGEBRA UNIVERSITARIA

Carlos Jacob Rubio Barrios



UADY
UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
DE YUCATÁN

QA Algebra universitaria / Carlos Jacob Rubio
157 Barrios, coordinador.—Mérida, Yucatán :
.A46 Ediciones de la Universidad Autónoma de
2025 Yucatán, 2025

1 recurso electrónico (356 páginas).
Acceso abierto en PDF.

1.1.Algebra— Problemas, ejercicios, etc.
2.Algebra—Estudio y enseñanza (Superior).
3.Matemáticas—Estudio y enseñanza.
I.Rubio Barrios, Carlos Jacob.

Algebra universitaria

Primera edición: marzo de 2025

D. R. © 2025, Universidad Autónoma de Yucatán
Bajo el sello de la Casa Editorial UADY
Calle 60 núm. 491 A por 57, centro,
C. P. 97000, Mérida, Yucatán, México
Tel. +52 (999) 923 9769
casa.editorial@correo.uady.mx
www.uady.mx/casa-editorial

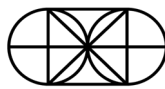
ISBN 978-607-8741-72-4

Las ideas y opiniones expresadas en esta obra son
responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan
necesariamente la postura oficial de la Universidad
Autónoma de Yucatán.

Hecho en México / *Made in Mexico*



UADY
UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
DE YUCATÁN



CASA EDITORIAL
UADY

**A mi papá, Carlos, por haber sido guía en mis estudios desde
niño.**

A mi mamá, Laura, por su apoyo incondicional de toda la vida.

A mi hermana Lizeth y a mi hermano Emmanuel, por ser.

CONTENIDO

Prefacio	XI
1 Polinomios, productos notables y factorización	1
1.1 Definiciones básicas	1
1.2 Suma y resta de polinomios	3
1.3 Multiplicación de polinomios	8
1.4 Productos Notables	14
1.5 Factorización por factor común	18
1.6 Factorización por agrupación de términos	21
1.7 Factorización de una diferencia de cuadrados	24
1.8 Factorización de un trinomio cuadrado perfecto	27
1.9 Factorización de un trinomio general	30
1.10 Factorización de una diferencia de cubos y de una suma de cubos .	35
1.11 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de polinomios .	39
2 Ecuaciones racionales e irracionales	45
2.1 Simplificación de expresiones racionales	46
2.2 Multiplicación y división de expresiones racionales	49
2.3 Suma y resta de expresiones racionales	54
2.4 Fracciones complejas	59
2.5 Ecuaciones cuadráticas con una incógnita	63
2.6 Ecuaciones racionales con una incógnita	70
2.7 Resolución de problemas y planteamiento de ecuaciones	80
2.8 Ecuaciones irracionales	86

3	Números complejos	94
3.1	Suma y resta de números complejos	95
3.2	Multiplicación de números complejos	99
3.3	División de números complejos	110
3.4	Conjugado de un número complejo	115
3.5	Módulo de un número complejo	121
3.6	Forma polar de un número complejo	129
3.7	Potencias de números complejos	140
3.8	Raíces n -ésimas de números complejos	144
4	Sistemas cuadráticos de dos ecuaciones con dos incógnitas	150
4.1	Sistema lineal-cuadrático	152
4.2	Sistemas cuadráticos de la forma $ax^2 + by^2 = c$	156
4.3	Sistemas cuadráticos de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 = d$	161
4.4	Sistemas cuadráticos simétricos	164
5	Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	170
5.1	Funciones y ecuaciones exponenciales	171
5.2	Logaritmos	182
5.3	Ecuaciones logarítmicas	195
5.4	Ecuaciones exponenciales-logarítmicas	203
6	Álgebra matricial	208
6.1	Definiciones y notaciones	209
6.2	Suma de matrices y producto de matriz por escalar	218
6.3	Multiplicación de matrices	228
6.4	Matrices en bloques	240
6.5	Inversa de una matriz	246
6.6	Operaciones elementales en matrices y matrices elementales	256
6.7	Formas escalonadas y forma escalonada reducida	269
7	Sistemas de ecuaciones lineales	284
7.1	Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas	285
7.2	Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales	294
7.3	Método de eliminación de Gauss	303
7.4	Método de eliminación de Gauss-Jordan	313
8	Determinantes	318
8.1	Determinantes de orden 2	318
8.2	Determinantes de orden n	324
8.3	Determinantes y matrices inversas	339
8.4	Regla de Cramer	348
	Bibliografía	353

Índice de Palabras 355

PREFACIO

El presente libro de Álgebra universitaria está diseñado en el marco del Modelo Educativo para la Formación Integral (MEFI), el cual se caracteriza por considerar al aprendizaje como el proceso que promueve el crecimiento intelectual y académico, fomentando en el estudiante un desempeño responsable y comprometido (UADY, 2015). En este proceso, los actores principales son los estudiantes, de manera que, el quehacer del profesor y de la gestión educativa se centran en el aprendizaje del estudiante.

En una Educación Centrada en el Aprendizaje (ECA), el propósito consiste en capacitar a los estudiantes para aprender a aprender, de modo que, resulta importante propiciar en ellos el aprendizaje autorregulado y autónomo; y contribuir a que desarrollen un compromiso auténtico en su propia formación académica.

Para fomentar la competencia aprender a aprender en el ámbito escolar, es importante tomar en consideración los siguientes factores: las estrategias de enseñanza y aprendizaje, la organización de los contenidos, los espacios educativos, el ambiente escolar propiciado por el profesor, así como, la elaboración de recursos y materiales didácticos.

Este libro de Álgebra universitaria es un material didáctico, que se pone a disposición del estudiante, para favorecer su aprendizaje autorregulado y autónomo, coadyuvando al trabajo dentro y fuera del aula. Se encuentra estructurado considerando los ejes transversales de la ECA favoreciendo que los estudiantes profundicen en los contenidos temáticos; autoevalúen sus competencias académicas con base en los diferentes niveles de dominio, suficiente (S), satisfactorio (SA) y sobresaliente (SS) y, desarrollen habilidades para el estudio independiente.

El Álgebra, con más de tres mil años de antigüedad, constituye la base sobre la que se apoya la alta matemática y es el lenguaje en que se expresa la ciencia moderna. Problemas de difícil solución a partir de un planteamiento aritmético se resuelven mucho más fácil si se plantean en términos algebraicos.

Igual que ocurre con los idiomas, el Álgebra también exige muchas horas de dedicación antes de que el estudioso pueda considerarse versado en ella. El viejo adagio de que “no existe un camino de aprendizaje corto” no es una excepción en este caso. Para llegar a “hablar” con soltura este idioma, es necesario adquirir, ante todo, una idea clara y concisa de sus principios fundamentales y, después, poseer una gran dosis de práctica.

El propósito de este libro es, en esencia, proporcionar al alumno los conocimientos necesarios de un primer curso de Álgebra de nivel universitario. Además de servir como libro de texto de un curso medio de álgebra, puede ser de considerable utilidad para aquellos que deseen repasar sus principios fundamentales como introducción a ulteriores estudios de matemáticas, ciencias o ingenierías.

El contenido del libro se divide en ocho capítulos que abarcan conceptos clásicos de la teoría. Cada capítulo está dividido en secciones y cada sección contiene definiciones, propiedades correspondientes y ejemplos ilustrativos de los mismos. Los ejemplos resueltos ilustran y complementan la teoría, ya que la repetición de las propiedades es de importancia vital para conseguir una enseñanza eficaz, al mismo tiempo que iluminan aquellos conceptos que por su especial dificultad escapan generalmente al alumno. Al final de cada sección, hay una actividad de aprendizaje con ejercicios propuestos para el lector y cada ejercicio está clasificado con base en los diferentes niveles de dominio: suficiente (S), satisfactorio (SA) y sobresaliente (SS).

En el Capítulo 1, se introducen los polinomios y los productos notables. Aunque el capítulo se centra en los polinomios de una variable, también se hace una breve introducción a los polinomios en varias variables. En la última parte del capítulo se presentan varios métodos de factorización de polinomios.

El Capítulo 2, comienza con el estudio de las expresiones racionales y sus operaciones aritméticas, lo que da lugar a las ecuaciones racionales con una incógnita. En particular, se estudia la ecuación cuadrática con una incógnita así como a las fórmulas de Vieta las cuales relacionan a los coeficientes de una ecuación cuadrática con sus raíces. En la última sección del capítulo, se muestran algunos métodos de resolución de ecuaciones irracionales con una incógnita.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de los números complejos. En la primera parte del capítulo, se trabaja con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números complejos. En la segunda parte del capítulo se estudia el

conjugado y el módulo de un número complejo, así como sus principales propiedades. Finalmente, en la última parte del capítulo, se estudia a los números complejos en forma polar y se muestra la utilidad de la forma polar en el cálculo de potencias y raíces de números complejos.

En el Capítulo 4, se trabaja con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Primero se estudian los sistemas donde una de las ecuaciones es lineal y la otra es cuadrática. Después se estudian dos tipos de sistemas donde ambas ecuaciones son cuadráticas. Finalmente, en la última sección, se estudia a los sistemas donde ambas ecuaciones son cuadráticas y simétricas.

El Capítulo 5 está dedicado a la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas. El capítulo comienza con el estudio de las funciones exponenciales y su comportamiento, para dar paso a la resolución de ecuaciones exponenciales. Posteriormente, se estudia a las funciones logarítmicas y se muestra la equivalencia que hay entre una expresión exponencial y una expresión logarítmica; equivalencia que da lugar a las propiedades fundamentales de los logaritmos. El capítulo concluye con la resolución de ecuaciones logarítmicas y con la resolución de ecuaciones que son al mismo tiempo exponenciales y logarítmicas.

En el Capítulo 6, se hace una introducción a la teoría básica de matrices. Se muestra cómo sumar y multiplicar matrices, así como las propiedades más importantes de estas dos operaciones entre matrices. También se estudian a las matrices invertibles así como a las operaciones elementales de renglón que dan lugar a las formas escalonadas y a la (única) forma escalonada reducida de una matriz.

En el Capítulo 7, se estudian los métodos más importantes de resolución de un sistema de ecuaciones lineales: el método de eliminación de Gauss y el método de eliminación de Gauss-Jordan.

Finalmente, en el Capítulo 8, se estudia el determinante de una matriz cuadrada. Primero se hace el estudio en el caso de una matriz de orden 2 y, después, se generaliza a una matriz de orden n . En ambos casos, el cálculo del determinante de una matriz se hace primero por cofactores y después utilizando las operaciones elementales de renglón. En la última parte del capítulo se estudia a las matrices invertibles vía el determinante, así como la fórmula de la adjunta para el cálculo de la inversa de una matriz. En la última sección se estudia la Regla de Cramer.

Agradecimientos

Quiero agradecer de una forma muy especial a los profesores (evaluadores anónimos) que revisaron minuciosamente el borrador inicial, por sus observaciones y valiosas aportaciones a esta primera edición. También agradezco a la Uni-

versidad Autónoma de Yucatán por las facilidades brindadas para escribir este libro durante el año sabático comprendido de Agosto de 2023 a Julio de 2024, así como a la Casa Editorial de la UADY por el apoyo para su publicación.

El autor.
Mérida, Yucatán, México.
Febrero, 2025.

CAPÍTULO 1

POLINOMIOS, PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

En este capítulo introducimos uno de los principales objetos de estudio del Álgebra: los polinomios. Los polinomios poseen una estructura algebraica que es idéntica a la estructura que tiene el conjunto de los números enteros y son objetos que aparecen prácticamente en todas las ramas de la Matemática. En este capítulo aprenderemos a sumar y a multiplicar polinomios, así como algunas estrategias de factorización. Los polinomios, los productos notables y la factorización son conceptos matemáticos relacionados que se utilizan para resolver ecuaciones y simplificar expresiones racionales. Estos conceptos son útiles en las Ciencias e Ingenierías.

1.1. Definiciones básicas

Un **polinomio en x con coeficientes números reales** es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (1.1)$$

donde n es un entero mayor o igual que cero y los a_i ($i = 0, 1, \dots, n$), llamados **coeficientes**, son números reales. Las expresiones $a_i x^i$ son llamados términos del polinomio y a_0 es el **término constante**. Aquellos términos $a_i x^i$ cuyos coeficientes a_i son cero se pueden omitir. Un polinomio cuyos coeficientes son todos iguales

a cero, es llamado **polinomio cero**. Si para algún $i > 0$, es cierto que $a_i \neq 0$, el mayor de dichos valores de i es el **grado del polinomio** y el coeficiente correspondiente es llamado **coeficiente principal**. Cuando el coeficiente principal a_n es 1, el polinomio se llama **mónico**. Un **polinomio constante** es aquel que tiene solo el término a_0 . Un polinomio constante no cero tiene grado 0, pero, por convención, el polinomio cero tiene grado $-\infty$.

Los polinomios de grados 1, 2, 3, 4 y 5, tienen un nombre especial. Si es de grado 1, se llama **polinomio lineal**; si es de grado 2, se llama **polinomio cuadrático**; si es de grado 3, se llama **polinomio cúbico**; si es de grado 4, se llama **polinomio cuártico**; si es de grado 5, se llama **polinomio quíntico**.

Existen algunas convenciones cuando trabajamos con polinomios. Los términos de la forma $1x^k$ se pueden escribir simplemente como x^k . Así, por ejemplo, en vez de escribir $2 + 3x + 0x^2 + 0x^3 + 1x^4$, escribimos $2 + 3x + x^4$.

También se adopta la convención usual de escribir $-ax^k$ en vez de $(-a)x^k$. De esta manera, en vez de escribir $(-1) + 2x + (-3)x^2$ simplemente escribimos $-1 + 2x - 3x^2$.

No es necesario escribir los términos de un polinomio siempre en el mismo orden. Por ejemplo, el polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ lo podemos escribir como $a_0 + a_2x^2 + a_1x + a_3x^3$ o también como $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Usualmente, escribimos $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, para denotar polinomios en x .

Ejemplo 1.1.1

El polinomio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 2$ es un polinomio mónico de grado 3 con término constante igual a 2.

Ejemplo 1.1.2

La expresión $2x^{-1} + 5$ no es un polinomio porque el exponente en $2x^{-1}$ es un entero negativo. La expresión $x^3 + 3x^{1/2}$ tampoco es un polinomio porque el exponente en $3x^{1/2}$ no es un número entero.

Ejemplo 1.1.3

Si m es un entero positivo, el polinomio $q(x) = -x^{2m} + 2x^m + 1$ es un polinomio de grado $2m$ con coeficiente principal igual a -1 y término constante igual a 1.

Podemos **evaluar** un polinomio reemplazando su variable por cualquier número y efectuando las operaciones. El valor de un polinomio $p(x)$ en $x = r$, es denotado por $p(r)$. Por ejemplo, si $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 4$, entonces $p(2) = 3(2^3) - 2(2^2) - 2 + 4 = 24 - 8 - 2 + 4 = 18$.

Un número r es un **cero o raíz** de un polinomio $p(x)$ si $p(r) = 0$. Por ejemplo, -1 es un cero del polinomio $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 4$, ya que $p(-1) = -3 - 2 + 1 + 4 = 0$.

Observación 1.1.4

También hay polinomios en más de una variable. Por ejemplo, un polinomio $p(x, y)$ en dos variables x, y , es una suma finita de términos de la forma cx^ky^m , donde c es un coeficiente y k, m , son enteros no negativos. El número $k + m$ es el grado del término cx^ky^m y, el grado del polinomio $p(x, y)$, es el mayor de los grados de sus términos. Por ejemplo, el polinomio $p(x, y) = x^2 + y^2 - 5$ es un polinomio en dos variables, los términos x^2 y y^2 tienen grado 2, el término -5 tiene grado 0 y el grado de $p(x, y)$ es 2. De manera análoga, un polinomio $p(x, y, z)$ en tres variables x, y, z , es una suma finita de términos de la forma $cx^ky^mz^\ell$, donde c es un coeficiente y k, m, ℓ , son enteros no negativos. El número $k + m + \ell$ es el grado del término $cx^ky^mz^\ell$ y, el grado del polinomio $p(x, y, z)$, es el mayor de los grados de sus términos. Por ejemplo, el polinomio $p(x, y, z) = 4x^3 + 7xy + 6z$ es un polinomio en tres variables, el término $4x^3$ tiene grado 3, el término $7xy$ tiene grado 2, el término $6z$ tiene grado 1 y el grado de $p(x, y, z)$ es 3.

En el caso de un polinomio en dos variables, $p(x, y)$, el valor en $x = r$ y $y = s$, es denotado por $p(r, s)$. Si, por ejemplo, $p(x, y) = x^2 + y^2 - 5$, entonces $p(2, 4) = 2^2 + 4^2 - 5 = 4 + 16 - 5 = 15$. De manera análoga, podemos evaluar en un polinomio en tres variables. Por ejemplo, si $p(x, y, z) = 4x^3 + 7xy + 6z$, entonces $p(-1, 0, 1) = 4(-1)^3 + 7(-1)(0) + 6(1) = -4 + 6 = 2$.

1.2. Suma y resta de polinomios

Los polinomios se pueden sumar y restar, considerando a las variables como si fueran números.

Suma y resta de polinomios (1.2.1)

Si

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

entonces la **suma** $p(x) + q(x)$ es el polinomio

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

La **resta** $p(x) - q(x)$ es el polinomio

$$p(x) - q(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0).$$

Ejemplo 1.2.2

Si $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5$ y $q(x) = x^2 + x + 6$, entonces

$$p(x) + q(x) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1,$$

$$p(x) - q(x) = 2x^3 - x - 11.$$

Observa que $p(x) = 2x^3 + 1x^2 + 0x - 5$ y $q(x) = 0x^3 + 1x^2 + 1x + 6$.

Ejemplo 1.2.3

Si $p(x) = 3x + x^3$, $q(x) = -4x^2 + 5$ y $r(x) = -x^3 + 4x^2 - 6$, entonces

$$\begin{aligned} & p(x) + q(x) + r(x) \\ &= (x^3 + 0x^2 + 3x + 0) + (0x^3 - 4x^2 + 0x + 5) + (-x^3 + 4x^2 + 0x - 6) \\ &= 3x - 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.4

Si $p(x) = x^3 + 4x^2 - 6$ y $q(x) = x^4 - 1$, entonces

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (0x^4 + x^3 + 4x^2 + 0x - 6) - (x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1) \\ &= -x^4 + x^3 + 4x^2 - 5. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.5

Si r es un entero positivo, $p(x) = 2x^{2r} - 6x^r - 3$ y $q(x) = 3x^{2r} - 2x^r + 6$, entonces

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (2 + 3)x^{2r} + (-6 - 2)x^r + (-3 + 6) = 5x^{2r} - 8x^r + 3, \\ p(x) - q(x) &= (2 - 3)x^{2r} + (-6 - (-2))x^r + (-3 - 6) = -x^{2r} - 4x^r - 9. \end{aligned}$$

Propiedades de la suma de polinomios (1.2.6)

Si $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son polinomios con coeficientes reales, entonces

- 1) $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$, esto es, la suma es conmutativa.
- 2) $[p(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)]$, esto es, la suma es asociativa.

Suma y resta de polinomios en varias variables (1.2.7)

Los polinomios en varias variables se pueden sumar y restar de manera análoga a los polinomios en una variable. Los términos que contienen las mismas variables donde cada una está elevada a la misma potencia, se llaman **términos semejantes**. Si un polinomio tiene términos semejantes, el polinomio se puede simplificar combinando los términos semejantes. Por ejemplo, el polinomio $p(x, y) = 2xy^2 - 8x - 3xy^2 + 3x$ es un polinomio

en dos variables x , y , donde $2xy^2$ y $3xy^2$ son términos semejantes, ya que ambos términos tienen las mismas variables x , y y cada una está elevada a la misma potencia: x , y^2 . Los términos $-8x$ y $3x$ también son términos semejantes. Entonces, agrupando los términos semejantes podemos simplificar el polinomio $p(x, y)$ como $-xy^2 - 5x$.

Para sumar o restar polinomios en varias variables, se agrupan los términos semejantes y se suman o restan, según sea el caso. Por ejemplo, si queremos sumar los polinomios en tres variables $3x + 2y - 4z$ y $45x - y + 75z$, simplemente agrupamos y sumamos los términos semejantes. El resultado es

$$\begin{aligned}(3x + 2y - 4z) + (45x - y + 75z) &= (3x + 45x) + (2y - y) + (-4z + 75z) \\ &= 48x + y + 71z.\end{aligned}$$

Actividad de Aprendizaje 1.2.8

- 1) (S) Determina cuáles de las siguientes expresiones son polinomios. Para cada polinomio, especifica su grado, su coeficiente constante, su coeficiente principal y su valor en $x = 0$ y en $x = -\frac{1}{2}$.
 - a) 0.
 - b) $3x^4$.
 - c) $3 + x^2$.
 - d) $8x^2 - 3x$.
 - e) $x + x^{-1}$.
 - f) 2^x .
 - 2) (S) Determina el grado de cada uno de los siguientes polinomios, indicando el número de variables de cada uno.
 - a) $x - y$.
 - b) $3xy + 2x^2$.
 - c) $4xy^2 + 3x + 3y + 4x^2y$.
 - d) $5x + 7$.
 - e) $xy^2 + yz^2 + zx^2$.
 - f) $xy^2 + yz^2 + zx^2 - x^2y - y^2z - z^2x$.
 - 3) (S) Realiza las siguientes sumas y restas de polinomios.
 - a) $5 + (2 + 3x)$.
-

Actividad de Aprendizaje 1.2.8 (Continuación)

- b) $(2x^2 - 3) + (5x^2 + 6)$.
c) $(3x^3 - 2x + 8) + (3x - 5)$.
d) $(2 - 8x) + (-2x^4 + 3x + 2)$.
e) $(2 - \frac{1}{2}x^2 + x^4) + (\frac{1}{3}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 3)$.
f) $(4 - x^3) - (4 + x^3)$.
g) $(6x^3 - 12) - (-x^3 + x - 2)$.
h) $(\frac{1}{4}x^2 - 5x) - (12 + 4x - \frac{3}{2})$.
i) $(6x^{2r} - 5x^r + 4) + (2x^{2r} + 2x^r + 3)$, donde r es un entero positivo.
j) $(7x^{4m} - 3x^{2m} - 1) - (4x^{4m} + x^{3m} - 6x^{2m})$, donde m es un entero positivo.
- 4) (S) Si $p(x) = 2(x + 2)^3 + x^2 + 4x + 4$, determina los valores de $p(-3)$, $p(0)$ y $p(3)$.
- 5) (S) Realiza las operaciones indicadas.
- a) $(4x^2 - 12xy + 9y^2) + (25x^2 + 4xy - 32y^2)$.
b) $(10ab + 15ac - 25bc + 5) + (4ab - 8bc - 12)$.
c) $(14x^3y^2 - 5xy + 14y) - (7x^3y^2 - 8xy + 10y)$.
d) $(10a^3 + 5b^2 - 5c + 10) - (15 + 5c - 15b^2 + 10a^3)$.
e) $(3x^4y^3 + 5x^3y^2 - 2x^2y^2) - (-2x^4y^3 + 4x^3y^2 - 2x^2y^3 - 1)$.
- 6) (S) Sean $p(x) = 2x^2 + 5x + 13$ y $q(x) = x^3 - 3x - 4$. Determina el valor de $p(q(3))$.
- 7) (S) Sea $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + ax - 11$. Si $p(1) = 2$, determina el valor de a .
- 8) (SA) Sean $p(x) = x^4 + a^2x^2 - x$ y $q(x) = 2x^3 - a - x + 1$. Determina el valor de a que cumpla que $p(1) = q(1)$.
- 9) (SA) Considera el polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$. Verifica que
- $$p(1) + p(4) + p(6) + p(7) = p(2) + p(3) + p(5) + p(8).$$
- 10) (SS) Si $(3x - 1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + \cdots + a_1x + a_0$ para todo número real x , determina el valor de $a_7 + a_6 + \cdots + a_1 + a_0$.
- 11) (SS) Considera el polinomio $q(x) = ax^7 + bx^3 + cx - 5$, donde a , b y c son constantes. Si $q(-7) = 7$, determina el valor de $q(7)$.

1.3. Multiplicación de polinomios

Un **monomio** es un polinomio de la forma ax^k , esto es, es un polinomio con un solo término. Por ejemplo, $3x$, $-x^2$ y x^3 son ejemplos de monomios. El **producto de polinomios** más simple es cuando uno de los factores es un monomio.

Producto de monomio por polinomio (1.3.1)

Si $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, entonces

$$\begin{aligned} ax^k \cdot p(x) &= ax^k(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) \\ &= aa_nx^{k+n} + aa_{n-1}x^{k+n-1} + \cdots + aa_1x^{k+1} + aa_0x^k. \end{aligned}$$

Observación 1.3.2

El producto de monomio por polinomio es conmutativo, esto es, si $p(x)$ es un polinomio, entonces $ax^k \cdot p(x) = p(x) \cdot ax^k$.

Ejemplo 1.3.3

$$\begin{aligned} 3x(2x^2 - 5x + 3) &= 6x^3 - 15x^2 + 9x, \\ (2x - 7)(3x) &= 6x^2 - 21x, \\ 4x^2(3x - 2x^3 + 1) &= 12x^3 - 8x^5 + 4x^2. \end{aligned}$$

Producto de polinomios (1.3.4)

Para multiplicar dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, cada monomio de $p(x)$ se multiplica por el polinomio $q(x)$ y los polinomios obtenidos se suman. El producto de $p(x)$ y $q(x)$ también se puede realizar multiplicando cada monomio de $q(x)$ por el polinomio $p(x)$ y sumando los polinomios resultantes.

Escribiremos $p(x) \cdot q(x)$ o simplemente $p(x)q(x)$ para indicar el producto de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$.

Ejemplo 1.3.5

$$\begin{aligned}(3x + 4)(2x + 1) &= 3x(2x + 1) + 4(2x + 1) = (6x^2 + 3x) + (8x + 4) \\ &= 6x^2 + 11x + 4.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.6

Si a es un número real, entonces

$$(x + a)(x - a) = (x + a)x - (x + a)a = x^2 + ax - xa + a^2 = x^2 + a^2,$$

ya que $ax = xa$.

Ejemplo 1.3.7

Si a es un número real, entonces

$$\begin{aligned}(x + a)^2 &= (x + a)(x + a) = x(x + a) + a(x + a) = x^2 + xa + ax + a^2 \\ &= x^2 + 2ax + a^2,\end{aligned}$$

ya que $xa = ax$.

Ejemplo 1.3.8

Si a es un número real, entonces

$$\begin{aligned}(x - a)^2 &= (x - a)(x - a) = x(x - a) - a(x - a) = x^2 - xa - ax + a^2 \\ &= x^2 - 2ax + a^2,\end{aligned}$$

ya que $xa = ax$.

Ejemplo 1.3.9

$$\begin{aligned}(4x^2 - 3x - 1)(2x - 5) &= (4x^2 - 3x - 1)(2x) + (4x^2 - 3x - 1)(-5) \\ &= (8x^3 - 6x^2 - 2x) + (-20x^2 + 15x + 5) \\ &= 8x^3 - 26x^2 + 13x + 5.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.10

Si a y b son números reales, entonces

$$\begin{aligned}(x + a)(x + b) &= x(x + b) + a(x + b) = (x^2 + bx) + (ax + ab) \\ &= x^2 + (a + b)x + ab.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.11

Si m denota un entero positivo, entonces

$$\begin{aligned}(6x^m - 5)(2x^{2m} - 3) &= 6x^m(2x^{2m} - 3) - 5(2x^{2m} - 3) \\ &= (12x^{3m} - 18x^m) + (-10x^{2m} + 15) \\ &= 12x^{3m} - 18x^m - 10x^{2m} + 15.\end{aligned}$$

La multiplicación de dos polinomios, se puede realizar también escribiendo a los polinomios uno debajo del otro, previamente ordenados preferentemente en forma descendente con respecto al grado de sus términos. A continuación se multiplica cada término del primer polinomio, por cada uno de los términos del segundo polinomio. Los productos parciales obtenidos de esta forma, se escriben en forma ordenada uno debajo de otro del mismo grado y se suma ordenadamente, obteniendo así el producto total.

Ejemplo 1.3.12

Efectuar el producto $(4x^3 + 7x^2 - 6)(2x^2 - 3x - 4)$.

Solución. Observemos que ambos polinomios del producto ya están ordenados en forma descendente con respecto al grado de sus términos. A continuación los escribimos uno debajo del otro, efectuamos los productos parciales escribiendo a los monomios resultantes uno debajo de otro del mismo grado y sumamos.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 4x^3 \\ 2x^2 \end{array} \begin{array}{r} +7x^2 \\ -3x \end{array} \begin{array}{r} -6 \\ -4 \end{array} \\
 \hline
 (1) \begin{array}{r} 8x^5 \\ +14x^4 \\ -12x^3 \end{array} \begin{array}{r} -12x^2 \\ -21x^3 \\ +18x \end{array} \\
 (2) \begin{array}{r} -12x^4 \\ -28x^2 \\ -16x^3 \end{array} \begin{array}{r} +18x \\ +24 \end{array} \\
 (3) \begin{array}{r} -12x^2 \\ -16x^3 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} 8x^5 \\ +2x^4 \\ -40x^2 \\ -37x^3 \\ +18x \\ +24 \end{array}
 \end{array}$$

En esta multiplicación, hemos multiplicado el polinomio $p(x) = 4x^3 + 7x^2 - 6$, primero por $2x^2$ obteniendo el polinomio que aparece en (1), luego multiplicamos el polinomio $p(x)$ por $-3x$ obteniendo el polinomio que aparece en (2) y, después, multiplicamos el polinomio $p(x)$ por -4 , obteniendo el polinomio que aparece en (3). Por último sumamos los resultados obtenidos en (1), (2) y (3).

Por lo tanto, $(4x^3 + 7x^2 - 6)(2x^2 - 3x - 4) = 8x^5 + 2x^4 - 40x^2 - 37x^3 + 18x + 24$. ■

La ventaja de esta forma de multiplicar, es que hace más fácil el cálculo agrupando los términos comunes por columnas.

Ejemplo 1.3.13

Efectuar el producto $(4x^3 + 5ax^2 + 7a^2x - 2a^3)(2x^2 - 5ax + 3a^2)$, donde a denota un número real.

Solución. Como ambos polinomios ya están ordenados en forma descendente con respecto al grado de sus términos, los escribimos uno debajo del otro y procedemos a multiplicar el primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio, escribiendo los resultados por columnas de acuerdo al grado de los resultados que se van obteniendo y sumando al final los términos semejantes de cada columna.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 4x^3 \\ 2x^2 \end{array} \begin{array}{r} +5ax^2 \\ -5ax \end{array} \begin{array}{r} +7a^2x \\ -2a^3 \end{array} \begin{array}{r} -2a^3 \\ +3a^2 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} 8x^5 \\ +10ax^4 \\ -20ax^4 \\ -25a^2x^3 \\ +12a^2x^3 \\ +15a^3x^2 \\ +21a^4x \\ -6a^5 \end{array} \begin{array}{r} +14a^2x^3 \\ -4a^3x^2 \\ -35a^3x^2 \\ +10a^4x \\ +12a^2x^3 \\ +15a^3x^2 \\ +21a^4x \\ -6a^5 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} 8x^5 \\ -10ax^4 \\ +a^2x^3 \\ -24a^3x^2 \\ +31a^4x \\ -6a^5 \end{array}
 \end{array}$$

Por lo tanto, la respuesta es $8x^5 - 10ax^4 + a^2x^3 - 24a^3x^2 + 31a^4x - 6a^5$. ■

Propiedades de la multiplicación de polinomios (1.3.14)

Si $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son polinomios con coeficientes reales, entonces

- 1) $p(x)q(x) = q(x)p(x)$, esto es, la multiplicación es conmutativa.
- 2) $p(x)[q(x)r(x)] = [p(x)q(x)]r(x)$, esto es, la multiplicación es asociativa.
- 3) $p(x)[q(x) + r(x)] = p(x)q(x) + p(x)r(x)$, esto es, la multiplicación se distribuye sobre la suma.

Multiplicación de polinomios en varias variables (1.3.15)

Los polinomios en varias variables se pueden multiplicar de manera análoga a los polinomios en una variable. Si p y q son polinomios en varias variables, el producto pq se efectúa multiplicando cada monomio del polinomio p por cada monomio del polinomio q y se suman los términos semejantes para simplificar la respuesta. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 (4x - 7xy)(2y + 3x) &= 4x(2y + 3x) - 7xy(2y + 3x) \\
 &= 8xy + 12x^2 - 14xy^2 - 21x^2y, \\
 (9y - xy)(5x^2y + 7xy - y) &= 9y(5x^2y + 7xy - y) - xy(5x^2y + 7xy - y) \\
 &= 45x^2y^2 + 63xy^2 - 9y^2 - 5x^3y^2 - 7x^2y^2 + xy^2 \\
 &= (45x^2y^2 - 7x^2y^2) + (63xy^2 + xy^2) - 5x^3y^2 - 9y^2 \\
 &= 38x^2y^2 + 64xy^2 - 5x^3y^2 - 9y^2.
 \end{aligned}$$

Actividad de Aprendizaje 1.3.16

- 1) (S) Realiza las operaciones indicadas.
 - a) $2x(5 - x)$.
 - b) $-x^3(x^4 - 2x^3 + 5x + 6)$.
 - c) $(3x + 2)(x^2 + 3x + 1)$.

- d) $(x^2 + 3x + 5)(2x^2 - 3x - 1)$.
e) $(2x - 1)(x + 1) + (2x - 5)(x - 1)$.
f) $(-x^3 + 3x^2 - 5)(x^2 + 2x - 1)$.
g) $(x - 1)(x + 4)(x + 2)$.
h) $(x^{n+1} + 2x^{n+2} - x^{n+3})(x^2 + x)$ con n un entero no negativo.
i) $(x^2 + y^2)(x + y)$.
j) $3x^r(5x^{2r} + 4x^{3r-1})$, donde r es un entero positivo.
- 2) (S) Realiza las siguientes multiplicaciones.
a) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$.
b) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
c) $(x + y)^3$.
d) $(x - y)^3$.
- 3) (S) Efectúa los siguientes productos.
a) $(x - 4x^2 + x^3 - 3)(x^3 - 1 + 4x^2)$.
b) $(2x^2 - 5xy + 6y^2)(3x^2 + 2xy - 4y^2)$.
c) $(2x - y + 3z)(x - 3y - 4z)$.
d) $(x^{n+2} - 3x^n - x^{n+1} + x^{n-1})(x^{n+1} + x^n + 4x^{n-1})$, donde n denota un entero mayor que 1.
- 4) (SA) Simplifica
$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4) - (x^3 - 8)(x^3 - 8) + 128.$$
- 5) (SA) Sean $p(x) = 2x^2 + 5x + 13$ y $q(x) = x^3 - 3x - 4$. Determina el valor de c tal que el polinomio $xp(x) + cq(x)$ tenga grado igual a 2.
- 6) (SA) Determina un polinomio $p(x)$ de grado 3 tal que $p(1) = 0$, $p(2) = 7$, $p(3) = 26$ y $p(4) = 63$.
- 7) (SA) Escribe a cada polinomio como el producto de dos binomios más o menos una constante. Por ejemplo, $xy + x + y = (x + 1)(y + 1) - 1$.
a) $xy + 3x - 5y$.
b) $2xy + 14x - 3y$.
c) $6x^2y^2 - 3x^2 - 2y^2$.

Actividad de Aprendizaje 1.3.16 (Continuación)

- 8) (SA) Un **cambio de variable** en un polinomio en una variable, significa cambiar la variable por otra. Por ejemplo, si $p(x) = 4x^2 + 5x + 6$, entonces

$$\begin{aligned} p(x+1) &= 4(x+1)^2 + 5(x+1) + 6 = 4(x^2 + 2x + 1) + 5x + 5 + 6 \\ &= 4x^2 + 13x + 15. \end{aligned}$$

La variable x se reemplazó por $x+1$ y se obtuvo un nuevo polinomio. Si $q(x) = 3x^2 + 2x + 4$, determina $q(x+1) + q(x-1) - 2q(x)$.

- 9) (SS) Si $p(x) = 1 + 3(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)(x^{16} + 1)(x^{32} + 1)(x^{64} + 1)$, determina el valor de $p(2)$.
- 10) (SS) Determina los coeficientes de las potencias pares y de las potencias impares del polinomio

$$(1 - x + x^2 - \dots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + x^{100}).$$

1.4. Productos Notables

Se llaman **productos notables** a las multiplicaciones con expresiones algebraicas cuyos resultados se pueden verificar mediante simple inspección, sin tener que verificar la multiplicación.

Cada producto notable corresponde a una fórmula de factorización. Algunos productos notables son

- 1) **Producto de binomios conjugados:** $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Los binomios $a-b$ y $a+b$ se llaman **binomios conjugados**.
- 2) **Binomio al cuadrado:** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- 3) **Binomio al cubo:** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
- 4) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.
- 5) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Ejemplo 1.4.1

$$(3x-2)(3x+2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4.$$

Ejemplo 1.4.2

En general, $(a + b)^2$ no es igual a $a^2 + b^2$. Por ejemplo, si $a = 1$ y $b = 2$, entonces $(a + b)^2 = (1 + 2)^2 = 9$ mientras que $a^2 + b^2 = 1 + 2^2 = 5$.

Ejemplo 1.4.3 Trinomio al cuadrado

Por la asociatividad de la suma, tenemos que $a + b + c = (a + b) + c$. Luego, aplicando la fórmula de un binomio al cuadrado, tenemos que

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.4

En general, $(a + b)^3$ no es igual a $a^3 + b^3$. Por ejemplo, si $a = 1$ y $b = 2$, entonces $(a + b)^3 = (1 + 2)^3 = 27$ mientras que $a^3 + b^3 = 1 + 2^3 = 9$.

Ejemplo 1.4.5 Trinomio al cubo

Por la asociatividad de la suma, tenemos que $a + b + c = (a + b) + c$. Luego, aplicando la fórmula de un binomio al cubo, obtenemos que

$$\begin{aligned}(a + b + c)^3 &= [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a^2 + 2ab + b^2)c + 3(ac^2 + bc^2) + c^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + b^2c + ac^2 + bc^2) + 6abc.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.6

Simplificar

$$(a+b+c)(a+b-c) + (a+b-c)(a-b+c) + (a-b+c)(b+c-a) + (b-c+a)(b-c-a).$$

Solución. Observemos que:

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a+b-c) &= [(a+b)+c][(a+b)-c] = (a+b)^2 - c^2, \\(a+b-c)(a-b+c) &= [a+(b-c)][a-(b-c)] = a^2 - (b-c)^2, \\(a-b+c)(b+c-a) &= [c+(a-b)][c-(a-b)] = c^2 - (a-b)^2, \\(b-c+a)(b-c-a) &= [(b-c)+a][(b-c)-a] = (b-c)^2 - a^2.\end{aligned}$$

Entonces, la expresión original es igual a

$$(a+b)^2 - c^2 + a^2 - (b-c)^2 + c^2 - (a-b)^2 + (b-c)^2 - a^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2.$$

Finalmente, tenemos que $(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$. Por lo tanto, la expresión original se simplifica a $4ab$. ■

Observación 1.4.7

Los productos notables son útiles para factorizar, esto es, para transformar una suma en un producto.

Ejemplo 1.4.8Factorizar $x^4 - 1$ como producto de polinomios con coeficientes enteros.

Solución. Observemos primero que $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2$ es una diferencia de cuadrados. Entonces, $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ donde $x^2 - 1$ es también una diferencia de cuadrados. Por lo tanto, $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$. ■

Ejemplo 1.4.9Factorizar $x^3 + 1000$ como producto de polinomios con coeficientes enteros.

Solución. Observemos que $1000 = 10^3$. Entonces, aplicando la fórmula para la suma de cubos, obtenemos que $x^3 + 1000 = x^3 + 10^3 = (x + 10)(x^2 - 10x + 100)$. ■

Ejemplo 1.4.10

Factorizar $x^6 - y^6$ como producto de polinomios con coeficientes enteros.

Solución. Observemos que $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2$ es una diferencia de cuadrados. Entonces, $x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$. Usando ahora las fórmulas para la suma de cubos y la diferencia de cubos, obtenemos que

$$x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) = (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Solución alternativa. Si consideramos a la diferencia $x^6 - y^6$ como la diferencia de cubos $(x^2)^3 - (y^2)^3$, tenemos que

$$x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) = (x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4).$$

Para factorizar el polinomio $x^4 + x^2y^2 + y^4$, observemos que

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$$

es una diferencia de cuadrados.

Luego, $x^4 - x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$ y, por lo tanto,

$$x^6 - y^6 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy).$$

Actividad de Aprendizaje 1.4.11

- 1) (S) Determina el valor de $100002^2 - 99998^2$.
- 2) (S) Si sabes que $9876^2 = 97535376$, determina el valor de 9877^2 .
- 3) (S) Desarrolla y simplifica $(a + b + c + d)^2$.
- 4) (S) Desarrolla y simplifica $(a + b + c + d)^3$.
- 5) (SA) Desarrolla y simplifica $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$. ¿Cuál podría ser una factorización para $a^n - b^n$ si n representa cualquier entero

Actividad de Aprendizaje 1.4.11 (Continuación)

positivo?

- 6) (SA) Si la suma de dos números es igual a 1 y su producto también es igual a 1, determina el valor de la suma de sus cubos.
- 7) (SA) Factoriza $x^9 + 1$ como producto de polinomios con coeficientes enteros.
- 8) (SA) Sean x, y números reales tales que $x^3 + y^3 = x^2 + y^2 = x + y = a$. Determina todos los valores posibles de a .
- 9) (SA) Simplifica

$$(x - y)^2 - (y - z)^2 + (z - w)^2 - (w - x)^2 + 2(x - z)(y - w).$$

- 10) (SS) Si $a + b + c = 0$ y $a^3 + b^3 + c^3 = 216$, determina el valor numérico del producto abc . (Sugerencia: Considera $(a + b + c)^3$).
- 11) (SS) Simplifica

$$(a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c) + (c^2 - a^2 - b^2)^2.$$

- 12) (SS) Simplifica

$$(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) + 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

1.5. Factorización por factor común

Como comentamos antes, **factorizar** significa convertir una suma en un producto. El que un polinomio se pueda o no factorizar, depende del conjunto donde se consideren sus coeficientes. Por ejemplo, el polinomio $x^2 - 2$ se puede factorizar como el producto de los polinomios con coeficientes reales $x + \sqrt{2}$ y $x - \sqrt{2}$. Sin embargo, el mismo polinomio $x^2 - 2$ no se puede factorizar como un producto de dos polinomios con coeficientes enteros (ni racionales). Otro ejemplo, es el polinomio $x^2 + 1$ que se factoriza como $(x - \sqrt{-1})(x + \sqrt{-1})$ si permitimos que los coeficientes de los polinomios factores sean números complejos. Sin embargo, no se puede factorizar como producto de polinomios con coeficientes reales.

A menos que se especifique lo contrario, entenderemos por factorizar, escribir un polinomio con coeficientes enteros como producto de polinomios con coeficientes enteros.

Factorización por factor común (1.5.1)

Cuando en una expresión algebraica, cada término tiene un mismo factor, se dice que dicho factor es un factor común. El método de **factorización por factor común**, consiste en factorizar el mayor factor común de cada término en una expresión algebraica.

Ejemplo 1.5.2

El factor común de $24x^3$ y $32x^2$ es $8x^2$, pues 8 es el mayor factor común de 24 y 32, así como x^2 es el mayor factor común de x^3 y x^2 . Por lo tanto, la expresión $24x^3 - 32x^2$ se factoriza como $8x^2(3x - 4)$.

Ejemplo 1.5.3

El factor común de $5x^2(6x - 5)$ y $-(6x - 5)$ es $6x - 5$. Por lo tanto, la expresión $5x^2(6x - 5) - (6x - 5)$ se factoriza como $(6x - 5)(5x^2 - 1)$.

Ejemplo 1.5.4

Factorizar $72x^{2a}y^b + 48x^{a+1}y^{b+1} + 24x^ay^{2b}$, donde a y b denotan enteros no negativos.

Solución. El factor común es $24x^ay^b$, pues 24 es el mayor factor común de 72, 48 y 24; así como x^ay^b es el mayor factor común de $x^{2a}y^b$, $x^{a+1}y^{b+1}$ y x^ay^{2b} . Por lo tanto, $72x^{2a}y^b + 48x^{a+1}y^{b+1} + 24x^ay^{2b} = 24x^ay^b(3x^a + 2xy + y^b)$. ■

Ejemplo 1.5.5

Factorizar $(x + 1)^7(x^2 + 1)^{10} - (x + 1)^5(x^2 + 1)^{11}$.

Solución. El factor común es $(x+1)^5(x^2+1)^{10}$. Luego, tenemos que

$$(x+1)^7(x^2+1)^{10} - (x+1)^5(x^2+1)^{11} = (x+1)^5(x^2+1)^{10}[(x+1)^2 - (x^2+1)].$$

El factor que está entre corchetes se puede simplificar:

$$(x+1)^2 - (x^2+1) = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 1 = 2x.$$

Por lo tanto, $(x+1)^7(x^2+1)^{10} - (x+1)^5(x^2+1)^{11} = 2x(x+1)^5(x^2+1)^{10}$. ■

Ejemplo 1.5.6

Factorizar $(x+3)(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1) + (x+1)$.

Solución. El factor común es $x+1$. Entonces,

$$\begin{aligned} & (x+3)(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1) + (x+1) \\ &= (x+1)[(x+3)(x+2) + (x+2) + 1]. \end{aligned}$$

Simplifiquemos ahora el factor entre corchetes para ver si podemos seguir factorizando. Tenemos que

$$(x+3)(x+2) + (x+2) + 1 = x^2 + 5x + 6 + x + 2 + 1 = x^2 + 6x + 9,$$

el cual es un binomio al cuadrado, pues $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.

Por lo tanto, $(x+3)(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1) + (x+1) = (x+1)(x+3)^2$. ■

Actividad de Aprendizaje 1.5.7

- 1) (S) Factoriza $y^2 - 5y$.
- 2) (S) Factoriza $(a+b-1)(a^2+1) - a^2 - 1$.
- 3) (S) Factoriza $4uv + 6u^2v^2$.
- 4) (S) Factoriza $(3x+7)(2x-1) + (x-6)(2x-1)$.
- 5) (S) Factoriza $(a+b)(a-b) - (a-b)(a-b)$.
- 6) (S) Factoriza $(1+3a)(x+1) - 2a(x+1) + 3(x+1)$.
- 7) (S) Factoriza $(3x+2)(x+y-z) - (3x+2) - (x+y-1)(3x+2)$.
- 8) (SA) Factoriza $(z-x-y)(2a-b) - (x+y-z)(a+2b)$.
(Sugerencia: ¿A qué es igual $-(x+y-z)$?)

Actividad de Aprendizaje 1.5.7 (Continuación)

9) (SA) Factoriza $(x + y)^9(x - y)^5 - (x^2 - y^2)^7$.

(Sugerencia: Factoriza primero la diferencia de cuadrados $x^2 - y^2$).

10) (SS) Determina todos los números reales x, y tales que $(x + y)^3 = x^3 + y^3$.

1.6. Factorización por agrupación de términos

La **factorización por agrupación de términos** consiste en agrupar en forma adecuada para poder factorizar los términos agrupados.

Ejemplo 1.6.1

Factorizar $x^3 - 5x^2 + x - 5$.

Solución. Agrupando los términos primero y segundo, así como los términos tercero y cuarto, tenemos que

$$x^3 - 5x^2 + x - 5 = (x^3 - 5x^2) + (x - 5).$$

Factorizando en cada agrupación con factor común, obtenemos que

$$x^3 - 5x^2 + x - 5 = x^2(x - 5) + (x - 5).$$

Finalmente, factorizamos una vez más con factor común para obtener que

$$x^3 - 5x^2 + x - 5 = (x - 5)(x^2 + 1).$$

**Ejemplo 1.6.2**

Factorizar $5x^3 - 10x^2y + 7xy^2 - 14y^3$.

Solución. Como en el ejemplo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} 5x^3 - 10x^2y + 7xy^2 - 14y^3 &= (5x^3 - 10x^2y) + (7xy^2 - 14y^3) \\ &= 5x^2(x - 2y) + 7y^2(x - 2y) = (x - 2y)(5x^2 + 7y^2). \end{aligned}$$



Ejemplo 1.6.3

Factorizar $6x^2y - 15y - 5x + 18xy^2$.

Solución. Agrupando el primer término con el cuarto, así como el segundo con el tercero y aplicando factor común en cada agrupación, obtenemos que

$$\begin{aligned} 6x^2y - 15y - 5x + 18xy^2 &= (6x^2y + 18xy^2) - (15y + 5x) \\ &= 6xy(x + 3y) - 5(3y + x) = (x + 3y)(6xy - 5). \end{aligned}$$

■

Solución alternativa. Agrupando el primer término con el tercero, así como el segundo con el cuarto y aplicando factor común en cada agrupación, obtenemos que

$$\begin{aligned} 6x^2y - 15y - 5x + 18xy^2 &= (6x^2y - 5x) + (-15y + 18xy^2) \\ &= x(6xy - 5) + 3y(-5 + 6xy) = (6xy - 5)(x + 3y). \end{aligned}$$

■

Ejemplo 1.6.4

Factorizar $x^a y^b + xy + x^{a+1} + y^{b+1}$ si a y b representan enteros no negativos.

Solución. Agrupando los términos primero y tercero, así como los términos segundo y cuarto, tenemos que

$$x^a y^b + xy + x^{a+1} + y^{b+1} = (x^a y^b + x^{a+1}) + (xy + y^{b+1}).$$

Ahora factorizamos con factor común en cada agrupación:

$$x^a y^b + xy + x^{a+1} + y^{b+1} = x^a(y^b + x) + y(x + y^b).$$

Por último, volvemos a factorizar por factor común:

$$x^a y^b + xy + x^{a+1} + y^{b+1} = (x + y^b)(x^a + y).$$

■

Ejemplo 1.6.5

Factorizar $x^6y + x^4z^3 - x^6z + y^6z - x^4y^2z - x^2y^5 - y^4z^3 + x^2y^4z$.

Solución. Agrupemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & (x^6y - x^2y^5) + (x^4z^3 - y^4z^3) + (y^6z - x^4y^2z) + (x^2y^4z - x^6z) \\ &= x^2y(x^4 - y^4) + z^3(x^4 - y^4) - y^2z(x^4 - y^4) - x^2z(x^4 - y^4) \\ &= (x^4 - y^4)(x^2y + z^3 - y^2z - x^2z). \end{aligned}$$

El primer factor es una diferencia de cuadrados, así que

$$x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2).$$

El segundo factor lo podemos factorizar nuevamente por agrupación:

$$\begin{aligned} x^2y + z^3 - y^2z - x^2z &= (x^2y - x^2z) + (z^3 - y^2z) = x^2(y - z) - z(y^2 - z^2) \\ &= x^2(y - z) - z(y - z)(y + z) = (y - z)(x^2 - z(y + z)) \\ &= (y - z)(x^2 - zy - z^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la respuesta es $(x - y)(x + y)(y - z)(x^2 + y^2)(x^2 - zy - z^2)$. ■

Actividad de Aprendizaje 1.6.6

- 1) (S) Factoriza $x^4 - 2x + 3x^3 - 6$.
- 2) (S) Factoriza $6x^2 - 4ax - 9bx + 6ab$.
- 3) (S) Factoriza $x^2 - 4y^2 + x + 2y$.
- 4) (S) Factoriza $ac + bc + c^2 + ab$.
- 5) (SA) Factoriza $(z - x - y)(2a - b) - (x + y - z)(a + 2b)$.
- 6) (SA) Factoriza $xyz + yvz + xyw + yvw + wvr + xwr + xrz + vrz$.
- 7) (SA) Factoriza $x^7 + 27x^4 - x^3 - 27$.
- 8) (SA) Factoriza $x^3y^3 - y^3 + 8x^3 - 8$.
- 9) (SS) Factoriza $a^6 + b^6 - a^2b^4 - a^4b^2$.
- 10) (SS) Factoriza $bd(a^2 + c^2) + bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2) + ac(b^2 + d^2)$.

1.7. Factorización de una diferencia de cuadrados

Antes vimos el producto notable $(a - b)(a + b)$. La diferencia $a^2 - b^2$, resultado de este producto notable, es una **diferencia de cuadrados**.

Factorización de una diferencia de cuadrados (1.7.1)

En general, una diferencia de cuadrados es de la forma $a^{2m} - b^{2n}$ donde m y n son enteros positivos. Su factorización está dada de la siguiente manera

$$a^{2m} - b^{2n} = (a^m)^2 - (b^n)^2 = (a^m - b^n)(a^m + b^n).$$

Los factores $a^m - b^n$ y $a^m + b^n$ se llaman **binomios conjugados**.

Ejemplo 1.7.2

Factorizar $2^4 - 1$.

Solución. Observemos que $2^4 - 1 = 2^4 - 1^4 = (2^2)^2 - (1^2)^2$ es una diferencia de cuadrados. Luego, $2^4 - 1 = (2^2 - 1)(2^2 + 1) = (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1) = 1 \cdot 3 \cdot 5$. ■

Ejemplo 1.7.3

Factorizar $x^4 - y^4$.

Solución. Observemos que $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2$. Luego,

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2).$$

Notemos que el factor $x^2 - y^2$ también es una diferencia de cuadrados. ■

Ejemplo 1.7.4

Factorizar $32a^4b - 162b^5$.

Solución. Observemos que esta diferencia no es una diferencia de cuadrados. Sin embargo, factorizando primero con factor común, obtenemos una diferencia de cuadrados escondida.

$$\begin{aligned} 32a^4b - 162b^5 &= 2b(16a^4 - 81b^4) = 2b(4a^2 - 9b^2)(4a^2 + 9b^2) \\ &= 2b(2a - 3b)(2a + 3b)(4a^2 + 9b^2). \end{aligned}$$



Ejemplo 1.7.5

Factorizar $(5x + 2y)^2 - (3x - 7y)^2$.

Solución. Claramente tenemos una diferencia de cuadrados. Entonces,

$$\begin{aligned} (5x + 2y)^2 - (3x - 7y)^2 &= [(5x + 2y) - (3x - 7y)][(5x + 2y) + (3x - 7y)] \\ &= (2x + 9y)(8x - 5y). \end{aligned}$$



El siguiente ejemplo es un poco más sofisticado.

Ejemplo 1.7.6

Factorizar $(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 4(ab + cd)^2$.

Solución. Denotemos por E a la diferencia $(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 4(ab + cd)^2$. Como E es una diferencia de cuadrados, tenemos que

$$E = [(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + 2(ab + cd)][(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 2(ab + cd)].$$

Reordenando los términos dentro de cada corchete, obtenemos que

$$E = [(a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 - 2cd + d^2)][(a^2 - 2ab + b^2) - (c^2 + 2cd + d^2)].$$

Observemos ahora que cada expresión entre paréntesis es un binomio al cuadrado:

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2, \\ c^2 - 2cd + d^2 &= (c - d)^2, \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2, \\ c^2 + 2cd + d^2 &= (c + d)^2. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que

$$E = [(a+b)^2 - (c-d)^2][(a-b)^2 - (c+d)^2]$$

es un producto de diferencias de cuadrados. Factorizando cada diferencia de cuadrados y simplificando, obtenemos que

$$\begin{aligned} E &= [(a+b) - (c-d)][(a+b) + (c-d)][(a-b) - (c+d)][(a-b) + (c+d)] \\ &= (a+b-c+d)(a+b+c-d)(a-b-c-d)(a-b+c+d). \end{aligned}$$



Actividad de Aprendizaje 1.7.7

- 1) (S) Factoriza $4x^2 - 9$.
- 2) (S) Factoriza $(a+b)^2 - c^2$.
- 3) (S) Factoriza $x^2 - (y-x)^2$.
- 4) (S) Factoriza $2^{16} - 1$.
- 5) (S) Factoriza $36(a+b)^2 - 121(a-b)^2$.
- 6) (S) Factoriza $(2a+b-c)^2 - (a+b)^2$.
- 7) (S) Factoriza $(3y-1)^2 - (x+6)^2$.
- 8) (SA) Factoriza $(ab+cd)(a^2-b^2+c^2-d^2) + (ac+bd)(a^2+b^2-c^2-d^2)$.
- 9) (SA) Si n es un entero positivo, determina una fórmula para la siguiente suma

$$1 + 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \cdots (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^n} + 1).$$

- 10) Factoriza $x^8 - y^8$
 - a) (S) como producto de polinomios con coeficientes enteros (son 4 factores),
 - b) (SS) como producto de polinomios con coeficientes reales (son 5 factores).
- 11) (SS) Factoriza $ab^2c^4 - a^4b^2c + a^2b^4c - a^2bc^4 + a^4bc^2 - ab^4c^2$.
- 12) (SS) Sean x, y números reales. Si $x+4 = (y-2)^2$, $y+4 = (x-2)^2$ y $x \neq y$, determina el valor numérico de $x^2 + y^2$.

1.8. Factorización de un trinomio cuadrado perfecto

Anteriormente vimos el binomio al cuadrado $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. La expresión del lado derecho, $a^2 \pm 2ab + b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto.

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto (1.8.1)

En general, un **trinomio cuadrado perfecto** es de la forma $a^{2m} \pm 2a^m b^n + b^{2n}$ donde m y n son enteros positivos. Se caracteriza por tener dos términos que son cuadrados: $a^{2m} = (a^m)^2$ y $b^{2n} = (b^n)^2$; el otro término, $2a^m b^n$ o $-2a^m b^n$, es más o menos el doble del producto $a^m b^n$.

La factorización del trinomio cuadrado perfecto $a^{2m} \pm 2a^m b^n + b^{2n}$ es el cuadrado del binomio $a^m \pm b^n$, esto es,

$$a^{2m} \pm 2a^m b^n + b^{2n} = (a^m \pm b^n)^2.$$

Esta factorización se puede verificar muy fácilmente desarrollando el producto $(a^m \pm b^n)^2$.

Ejemplo 1.8.2

Verificar que la expresión $16y^2 + 24y + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto.

Solución. La expresión tiene dos términos que son cuadrados: $16y^2 = (4y)^2$ y $9 = 3^2$. El término $24y$ es el doble producto de $4y$ y 3 . ■

Ejemplo 1.8.3

Factorizar $9x^2 - 30xy + 25y^2$.

Solución. Observemos que

$$9x^2 - 30xy + 25y^2 = (3x)^2 - 2(3x)(5y) + (5y)^2 = (3x - 5y)^2.$$

■

Ejemplo 1.8.4

Factorizar $8y^3 + 24y^2 + 18y$.

Solución. Primero factorizamos por factor común:

$$8y^3 + 24y^2 + 18y = 2y(4y^2 + 12y + 9).$$

Observemos ahora que el trinomio del paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto. Luego, tenemos que $8y^3 + 24y^2 + 18y = 2y(2y + 3)^2$. ■

Ejemplo 1.8.5

Factorizar $(z^2 - y^2)^2(x^2 - a^2) + 4x^2y^2z^2$.

Solución. Desarrollando primero el producto $(z^2 - y^2)^2(x^2 - a^2)$, tenemos que

$$\begin{aligned}(z^2 - y^2)^2(x^2 - a^2) &= (z^4 - 2z^2y^2 + y^4)(x^2 - a^2) \\ &= z^4x^2 - 2x^2y^2z^2 + x^2y^4 - a^2z^4 + 2a^2y^2z^2 - a^2y^4.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}&(z^2 - y^2)^2(x^2 - a^2) + 4x^2y^2z^2 \\ &= z^4x^2 - 2x^2y^2z^2 + x^2y^4 - a^2z^4 + 2a^2y^2z^2 - a^2y^4 + 4x^2y^2z^2 \\ &= z^4x^2 + 2x^2y^2z^2 + x^2y^4 - a^2z^4 + 2a^2y^2z^2 - a^2y^4.\end{aligned}$$

Agrupando de manera conveniente, obtenemos que

$$(z^2 - y^2)^2(x^2 - a^2) + 4x^2y^2z^2 = (z^4x^2 + 2x^2y^2z^2 + x^2y^4) - (a^2z^4 - 2a^2y^2z^2 + a^2y^4).$$

Observemos que cada trinomio entre paréntesis en el lado derecho es un trinomio cuadrado perfecto. Entonces,

$$(z^2 - y^2)^2(x^2 - a^2) + 4x^2y^2z^2 = (z^2x + xy^2)^2 - (az^2 - ay^2)^2.$$

Por último, factorizamos la diferencia de cuadrados resultante.

$$(z^2 - y^2)^2(x^2 - a^2) + 4x^2y^2z^2 = (z^2x + xy^2 + az^2 - ay^2)(z^2x + xy^2 - az^2 + ay^2).$$

■

Ejemplo 1.8.6

Factorizar $x^3(x^3 + 2y^2 - x) + y(y^3 - 2x^2 - y)$

Solución. Desarrollando los productos, tenemos que

$$x^3(x^3 + 2y^2 - x) + y(y^3 - 2x^2 - y) = x^6 + 2x^3y^2 - x^4 + y^4 - 2x^2y - y^2.$$

Agrupando de manera conveniente, resulta que

$$x^3(x^3 + 2y^2 - x) + y(y^3 - 2x^2 - y) = (x^6 + 2x^3y^2 + y^4) - (x^4 + 2x^2y + y^2).$$

Observemos que cada expresión entre paréntesis del lado derecho es un trinomio cuadrado perfecto. Luego,

$$x^3(x^3 + 2y^2 - x) + y(y^3 - 2x^2 - y) = (x^3 + y^2)^2 - (x^2 + y)^2.$$

Por último, factorizamos la diferencia de cuadrados resultante.

$$x^3(x^3 + 2y^2 - x) + y(y^3 - 2x^2 - y) = (x^3 + y^2 + x^2 + y)(x^3 + y^2 - x^2 - y).$$

**Actividad de Aprendizaje 1.8.7**

- 1) (S) Da un ejemplo de un trinomio que no sea trinomio cuadrado perfecto.
- 2) (S) Factoriza $5x^2 + 30x + 45$.
- 3) (S) Factoriza $x^6 + 2x^5 + x^4$.
- 4) (S) Factoriza $a^2 + 2ab + b^2 - 1$.
- 5) (S) Factoriza $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$.
- 6) (S) Factoriza $x^2 - y^2 + 4 + 4x - 1 - 2y$.
- 7) (S) Factoriza $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2$.
- 8) (SA) Factoriza $(a - 9x)^2 + 24x(a - 3x)$.
- 9) (SA) Factoriza $x^3(x^3 + 2y^2 - x) + y(y^3 - 2x^2 - y)$.
- 10) (SS) Factoriza $x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 4x^2 - 1$. (Sugerencia: Sustituye el término $-3x^4$ por $x^4 - 4x^4$).

1.9. Factorización de un trinomio general

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ como un producto de dos binomios, debemos determinar dos factores de c cuya suma sea igual a b .

Factorización de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ (1.9.1)

La factorización del trinomio $x^2 + bx + c$ dada por

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

debe cumplir que $b = m + n$ y $c = mn$.

Observemos que $(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$, por lo que si $x^2 + bx + c = x^2 + (m + n)x + mn$, necesariamente $b = m + n$ y $c = mn$.

La técnica más común para determinar estos números m y n es mediante prueba y error.

Ejemplo 1.9.2

Factorizar $x^2 + 3x - 4$.

Solución. Dos números cuyo producto sea -4 y cuya suma sea igual a 3 son 4 y -1 , por lo que $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$. ■

Ejemplo 1.9.3

Factorizar $x^2 - 2x - 8$.

Solución. Debemos determinar dos números cuyo producto sea -8 y cuya suma sea -2 . Haremos una lista que nos ayudará a determinarlos.

Factores de -8	Suma
$1, -8$	-7
$-1, 8$	7
$2, -4$	-2
$-2, 4$	2

Como la suma requerida es -2 , los números que buscamos son 2 y -4 . Por lo tanto, $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$. ■

Ejemplo 1.9.4

Factorizar $x^{4n} + 7x^{2n} + 12$.

Solución. Observemos primero que $x^{4n} + 7x^{2n} + 12 = (x^{2n})^2 + 7(x^{2n}) + 12$, el cual es un trinomio de la forma $y^2 + 7y + 12$, donde $y = x^{2n}$. Necesitamos dos factores de 12 cuya suma sea igual a 7 . Es fácil ver que 4 y 3 funcionan. Por lo tanto, $y^2 + 7y + 12 = (y + 4)(y + 3)$. Como la variable original es x , necesitamos dar la respuesta en términos de x . Lo único que falta hacer es sustituir y por x^{2n} . De esta manera, obtenemos que $x^{4n} + 7x^{2n} + 12 = (x^{2n} + 4)(x^{2n} + 3)$. ■

Ejemplo 1.9.5

Factorizar $x^2 - 2(b^2 + c^2)x + (b + c)^2(b - c)^2$, donde b y c son números fijos.

Solución. Necesitamos dos factores de $(b + c)^2(b - c)^2$ cuya suma sea igual a $-2(b^2 + c^2)$. Tenemos que $(b + c)^2$ y $(b - c)^2$ son factores de $(b + c)^2(b - c)^2$, pero su suma es

$$(b + c)^2 + (b - c)^2 = (b^2 + 2bc + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) = 2(b^2 + c^2),$$

que no es igual a $-2(b^2 + c^2)$.

Para lograr tener el signo $-$, basta considerar los factores $-(b + c)^2$ y $-(b - c)^2$. El producto de estos dos factores sigue siendo igual a $(b + c)^2(b - c)^2$ y su suma es $-2(b^2 + c^2)$. Por lo tanto,

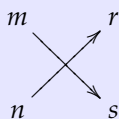
$$x^2 - 2(b^2 + c^2)x + (b + c)^2(b - c)^2 = (x - (b + c)^2)(x - (b - c)^2).$$

Factorización del trinomio $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$ (método del aspa simple) (1.9.6)

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ donde $a \neq 1$, necesitamos determinar dos factores m y n de a , y dos factores r y s de c , tales que

$$b = ms + nr.$$

Este método lo podemos enunciar de manera gráfica usando un **aspa**. Los factores del coeficiente a se colocan en las puntas de la izquierda del aspa, los factores del término independiente c se colocan en las puntas de la derecha del aspa y el coeficiente central b debe ser igual a la suma de los productos cruzados del aspa.



$$b = ms + nr$$

La factorización del trinomio se obtiene sumando en forma horizontal los extremos del aspa: $ax^2 + bx + c = (mx + r)(nx + s)$.

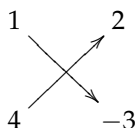
A manera de comprobación, desarrollando el producto del lado derecho obtenemos que

$$\begin{aligned}(mx + r)(nx + s) &= mnx^2 + msx + rnx + rs = mnx^2 + (ms + nr)x + rs \\ &= ax^2 + bx + c.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.9.7

Factorizar el trinomio $4x^2 + 5x - 6$.

Solución. El coeficiente principal 4 lo descomponemos en dos factores: 1 y 4. El coeficiente independiente -6 lo descomponemos en dos factores: 2 y -3 . Colocamos estos factores en los extremos izquierdo y derecho del aspa, respectivamente.

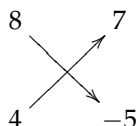


La suma de los productos cruzados, igual a $1(-3) + 4(2) = 5$, es igual al coeficiente del término central. Finalmente, la expresión factorizada es el producto de las sumas de los extremos del aspa, tomadas horizontalmente, esto es, $4x^2 + 5x - 6 = (x + 2)(4x - 3)$. ■

Ejemplo 1.9.8

Factorizar $32x^2 - 12x - 35$.

Solución. El coeficiente principal 32 lo descomponemos en dos factores: 8 y 4. El coeficiente independiente -35 lo descomponemos en dos factores: 7 y -5 . Colocamos estos factores en los extremos izquierdo y derecho del aspa, respectivamente.

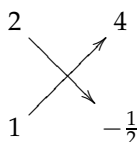


La suma de los productos cruzados, igual a $8(-5) + 4(7) = -12$, es igual al coeficiente del término central. Finalmente, la expresión factorizada es el producto de las sumas de los extremos del aspa, tomadas horizontalmente, esto es, $32x^2 - 12x - 35 = (8x + 7)(4x - 5)$. ■

Ejemplo 1.9.9

Factorizar $2x^2 + 3x - 2$ como producto de polinomios con coeficientes racionales.

Solución. Como los factores deben tener coeficientes racionales, tenemos más libertad de escoger los factores de 2 y de -2 . Para el 2 podemos usar 2 y 1, mientras que para -2 podemos usar 4 y $-\frac{1}{2}$. El aspa queda como sigue.



La suma de los productos cruzados es $2(-\frac{1}{2}) + 1(4) = -1 + 4 = 3$. Por lo tanto, obtenemos la factorización $2x^2 + 3x - 2 = (2x + 4)(x - \frac{1}{2}) = 2(x + 2)(x - \frac{1}{2})$. Como $2(x - \frac{1}{2}) = 2x - 1$, otra factorización es $2x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(2x - 1)$. ■

Ejemplo 1.9.10

Factorizar $abcx^2 - (a^2b^2 + c^2)x + abc$ donde a, b y c son números fijos.

Solución. El coeficiente principal abc lo descomponemos en dos factores: ab y c . El coeficiente independiente abc lo descomponemos en dos factores: $-c$ y $-ab$. Colocamos estos factores en los extremos izquierdo y derecho del aspa, respectivamente.

$$\begin{array}{ccc} ab & & -c \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & & -ab \\ c & & \end{array}$$

La suma de los productos cruzados, igual a $ab(-ab) + c(-c) = -(a^2b^2 + c^2)$, es igual al coeficiente del término central.

Por lo tanto, $abcx^2 - (a^2b^2 + c^2)x + abc = (abx - c)(cx - ab)$. ■

Ejemplo 1.9.11

Factorizar $64x^{12}y^3 - 68x^8y^7 + 4x^4y^{11}$.

Solución. Factorizando primero el factor común $4x^4y^3$, obtenemos que

$$64x^{12}y^3 - 68x^8y^7 + 4x^4y^{11} = 4x^4y^3(16x^8 - 17x^4y^4 + y^8).$$

Haciendo ahora el cambio de variable $w = x^4$, el polinomio del paréntesis se convierte en $16w^2 - 17wy^4 + y^8$. Tomando $a = 16$, $b = -17y^4$ y $c = y^8$, podemos aplicar aspa simple y obtenemos

$$\begin{array}{ccc} 16 & & -y^4 \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & & -y^4 \\ 1 & & \end{array}$$

La suma de los productos cruzados es $-16y^4 - y^4 = -17y^4$ que es igual a b . Por lo tanto, $16w^2 - 17wy^4 + y^8 = (16w - y^4)(w - y^4)$. Regresando a la variable original, tenemos que

$$4x^4y^3(16x^8 - 17x^4y^4 + y^8) = 4x^4y^3(16x^4 - y^4)(x^4 - y^4).$$

Por último, factorizando las diferencias de cuadrados, obtenemos que

$$64x^{12}y^3 - 68x^8y^7 + 4x^4y^{11} = 4x^4y^3(4x^2 + y^2)(2x + y)(2x - y)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y). \quad \text{■}$$

Actividad de Aprendizaje 1.9.12

- 1) (S) Factoriza $x^2 + 6x + 9$.
- 2) (S) Factoriza $x^2 + x - 132$.
- 3) (S) Factoriza $20 + a^2 - 21a$.
- 4) (S) Factoriza $x^3 + 4x^2 + 3x$.
- 5) (S) Factoriza $2x^2 - x - 21$.
- 6) (S) Factoriza $21x^2 + 11x - 2$.
- 7) (SA) Factoriza $4x^2 - 8x + 3$ como producto de polinomios con coeficientes racionales.
- 8) (SA) Sea n un entero positivo. Factoriza $8n^3 + 24n^2 + 16n$ y verifica que representa el producto de tres enteros pares consecutivos. Si $n = 10$, ¿cuáles son los tres enteros?
- 9) (SA) Factoriza $x^{2n} + 2x^n - 15$, donde n es un entero positivo.
- 10) (SA) Factoriza $8x^2y - 60xy + 28y$.
- 11) (SA) Factoriza $2x^2 + 2y^2 + 5xy$.

1.10. Factorización de una diferencia de cubos y de una suma de cubos

Anteriormente vimos la diferencia de cubos $a^3 - b^3$ y la suma de cubos $a^3 + b^3$ como resultados de los productos $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ y $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$, respectivamente.

Factorización de una diferencia y de una suma de cubos (1.10.1)

La forma general de una **diferencia de cubos** es $x^{3m} - y^{3n}$, donde m y n son enteros positivos, la cual se factoriza como

$$x^{3m} - y^{3n} = (x^m - y^n)(x^{2m} + x^m y^n + y^{2n}).$$

La forma general de una **suma de cubos** es $x^{3m} + y^{3n}$, donde m y n son enteros positivos, la cual se factoriza como

$$x^{3m} + y^{3n} = (x^m + y^n)(x^{2m} - x^m y^n + y^{2n}).$$

Cada una de estas factorizaciones se puede verificar realizando el producto de las expresiones que aparecen en el lado derecho de cada igualdad. Se deja de ejercicio al lector realizar esta verificación.

Ejemplo 1.10.2

Factorizar el número 1001 en factores primos.

Solución. Observemos que $1001 = 1000 + 1 = 10^3 + 1$ es una suma de cubos. Entonces,

$$10^3 + 1 = (10 + 1)(10^2 - 10 + 1) = 11(100 - 10 + 1) = 11(91) = 11(7)(13).$$

■

Ejemplo 1.10.3

Factorizar $2x^3 - 16$.

Solución. Claramente la expresión no es una diferencia de cubos. Sin embargo, contiene un factor que sí es una diferencia de cubos.

$$2x^3 - 16 = 2(x^3 - 8) = 2(x^3 - 2^3) = 2(x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

■

Ejemplo 1.10.4

Factorizar $27x^3 + y^6$.

Solución. Observemos que $27 = 3^3$ y que $y^6 = (y^2)^3$. Entonces,

$$\begin{aligned} 27x^3 + y^6 &= (3x)^3 + (y^2)^3 = (3x + y^2)((3x)^2 - 3xy^2 + (y^2)^2) \\ &= (3x + y^2)(9x^2 - 3xy^2 + y^4). \end{aligned}$$



Ejemplo 1.10.5

Factorizar $x^6 + y^6$.

Solución. Tenemos una suma de cubos, ya que $x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3$. Entonces,

$$x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)[(x^2)^2 - x^2y^2 + (y^2)^2] = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4).$$



Ejemplo 1.10.6

Factorizar $(x + y)^3 + z^3$.

Solución. Como es una suma de cubos, tenemos que

$$\begin{aligned} (x + y)^3 + z^3 &= [(x + y) + z][(x + y)^2 - (x + y)z + z^2] \\ &= (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz + z^2) \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - xz - yz). \end{aligned}$$



Ejemplo 1.10.7

Factorizar $(x + y)^3 + 3xy(1 - x - y) - 1$.

Solución. Agrupando el primer término con el tercero tenemos la expresión equivalente

$$[(x + y)^3 - 1] + 3xy(1 - x - y).$$

La expresión dentro de los corchetes es una diferencia de cubos, así que

$$\begin{aligned}(x+y)^3 - 1 &= (x+y-1)((x+y)^2 + (x+y) + 1) \\ &= (x+y-1)(x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1).\end{aligned}$$

Por otro lado, factorizando el signo $-$ en la expresión $3xy(1-x-y)$, resulta que $3xy(1-x-y) = -3xy(x+y-1)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(x+y)^3 - 1 + 3xy(1-x-y) &= (x+y-1)(x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1) - 3xy(x+y-1) \\ &= (x+y-1)(x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1 - 3xy) \\ &= (x+y-1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1).\end{aligned}$$



Actividad de Aprendizaje 1.10.8

- 1) (S) Factoriza $11^3 - 1$ y escribe tu respuesta como producto de números primos.
- 2) (S) Factoriza $(64x^3 - 125) + (4x - 5)$.
- 3) (S) Factoriza $(x+1)^3 + (x-2)^3$.
- 4) (S) Factoriza $(a-b)^3 - (a+b)^3$.
- 5) (S) Factoriza $64(x+y)^3 - 125$.
- 6) (S) Factoriza $x^3 + (x+1)^3$.
- 7) (SA) Si $x + y = 1$ y $x^2 + y^2 = 2 - xy$, determina el valor numérico de $x^3 + y^3$.
- 8) (SA) Factoriza $x(x^2 + xy - 1) - y(y^2 + xy - 1)$.
- 9) (SS) Factoriza $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$.
- 10) (SS) Factoriza $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. (Sugerencia: Suma a la expresión que se quiere factorizar $3a^2b + 3ab^2 - 3a^2b - 3ab^2 = 0$ y factoriza por agrupación).
- 11) (SS) Si $a^3 - b^3 = 24$ y $a - b = 2$, determina todos los valores posibles de $a + b$.
- 12) (SS) Determina todos los enteros x, y tales que $x^3 + y^3 = (x+y)^2$.

1.11. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de polinomios

A lo largo de esta sección, trabajaremos con polinomios con coeficientes enteros y las factorizaciones se entenderán que se forman con polinomios con coeficientes enteros.

El **mínimo común múltiplo** de dos o más polinomios, es el polinomio de menor grado que es múltiplo de cada polinomio y su coeficiente principal es el mínimo común múltiplo de los coeficientes principales de los polinomios dados. El **máximo común divisor** de dos o más polinomios, es el polinomio de mayor grado que es factor de cada polinomio y su coeficiente principal es el máximo común divisor de los coeficientes principales de los polinomios dados.

Cálculo del mínimo común múltiplo de 2 polinomios (1.11.1)

La estrategia para determinar el mínimo común múltiplo de dos polinomios es la siguiente

- 1) Factorizar por completo cada polinomio. Cualquier factor que aparezca más de una vez debe expresarse como potencia. Por ejemplo, $8(x-1)(x-1)$ debe expresarse como $2^3(x-1)^2$.
- 2) Listar todos los factores comunes y no comunes (distintos de 1) que aparezcan en cualquiera de los polinomios con la mayor potencia.
- 3) El mínimo común múltiplo es el producto de todos los factores encontrados en el paso 2).

Observación 1.11.2

Para calcular el mínimo común múltiplo de tres polinomios p , q y r , primero calculamos el mínimo común múltiplo de p y q utilizando el método descrito en (1.11.1). Luego calculamos el mínimo común múltiplo del polinomio recién obtenido y el polinomio r . En otras palabras, el mínimo común múltiplo de p , q y r se calcula de dos en dos.

En general, para determinar el mínimo común múltiplo de más de dos polinomios, se aplica la estrategia anterior de dos en dos.

Cálculo del máximo común divisor de 2 polinomios (1.11.3)

La estrategia para determinar el máximo común divisor de dos polinomios es la siguiente

- 1) Factorizar por completo cada polinomio. Cualquier factor que aparezca más de una vez debe expresarse como potencia. Por ejemplo, $8(x-1)(x-1)$ debe expresarse como $2^3(x-1)^2$.
- 2) Listar todos los factores comunes (distintos de 1) de ambos polinomios con la menor potencia.
- 3) El máximo común divisor es el producto de todos los factores encontrados en el paso 2).

Observación 1.11.4

Para calcular el máximo común divisor de tres polinomios p , q y r , primero calculamos el máximo común divisor de p y q utilizando el método descrito en (1.11.3). Luego calculamos el máximo común divisor del polinomio recién obtenido y el polinomio r . En otras palabras, el máximo común divisor de p , q y r se calcula de dos en dos.

En general, para determinar el máximo común divisor de más de dos polinomios, se aplica la estrategia anterior de dos en dos.

Ejemplo 1.11.5

Determinar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios $3x^2 + 6x$ y $x^2 + 4x + 4$.

Solución. Tenemos que $3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ y $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$. El factor común con la menor potencia es $x+2$. Los factores comunes y no comunes con la mayor potencia son: 3, x y $(x+2)^2$. Por lo tanto, el máximo común divisor es $x+2$ y el mínimo común múltiplo es $3x(x+2)^2$. ■

Ejemplo 1.11.6

Determinar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios $x^2 - 5x + 6$ y $x^2 - x - 2$.

Solución. Cada polinomio se factoriza como $(x - 3)(x - 2)$ y $(x - 2)(x + 1)$. El factor común con la menor potencia es $x - 2$. Los factores comunes y no comunes con la mayor potencia son: $x - 3$, $x - 2$ y $x + 1$. Por lo tanto, el máximo común divisor es $x - 2$ y el mínimo común múltiplo es $(x - 3)(x - 2)(x + 1)$. ■

Ejemplo 1.11.7

Determinar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios

$$2^3 \cdot 3^2(x - y)^3(x + 2y)^2, \quad 2^2 \cdot 3^3(x - y)^2(x + 2y)^3 \quad \text{y} \quad 3^2(x - y)^2(x + 2y).$$

Solución. Como son tres polinomios, de acuerdo con las Observaciones 1.11.2 y 1.11.4, debemos calcular de dos en dos su mínimo común múltiplo y su máximo común divisor. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ los polinomios en el mismo orden de arriba. Los factores comunes y no comunes de $p(x)$ y $q(x)$ con la mayor potencia son: 2^3 , 3^3 , $(x - y)^3$ y $(x + 2y)^3$. Luego, el mínimo común múltiplo de $p(x)$ y $q(x)$ es $h(x) = 2^3 \cdot 3^3(x - y)^3(x + 2y)^3$. Ahora determinaremos el mínimo común múltiplo de $h(x)$ y $r(x)$. Los factores comunes y no comunes de $h(x)$ y $r(x)$ con la mayor potencia son: 2^3 , 3^3 , $(x - y)^3$ y $(x + 2y)^3$. Luego, el mínimo común múltiplo de $h(x)$ y $r(x)$ es $2^3 \cdot 3^3(x - y)^3(x + 2y)^3$. Por lo tanto, el mínimo común múltiplo de los tres polinomios es $2^3 \cdot 3^3(x - y)^3(x + 2y)^3$.

Los factores comunes de $p(x)$ y $q(x)$ con la menor potencia son: 2^2 , 3^2 , $(x - y)^2$ y $(x + 2y)^2$. Luego, el máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ es el polinomio $g(x) = 2^2 \cdot 3^2(x - y)^2(x + 2y)^2$. Ahora determinaremos el máximo común divisor de $g(x)$ y $r(x)$. Los factores comunes de $g(x)$ y $r(x)$ con la menor potencia son: 3^2 , $(x - y)^2$ y $(x + 2y)$. Luego, el máximo común divisor de $g(x)$ y $r(x)$ es $3^2(x - y)^2(x + 2y)$. Por lo tanto, el máximo común divisor de los tres polinomios es $3^2(x - y)^2(x + 2y)$. ■

Ejemplo 1.11.8

Determinar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios $4x^2 + 12x - 16$, $6x^2 - 6$ y $8x^2 + 40x + 32$.

Solución. Tenemos que

$$p(x) = 4x^2 + 12x - 16 = 4(x^2 + 3x - 4) = 2^2(x + 4)(x - 1),$$

$$q(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 2(3)(x - 1)(x + 1),$$

$$r(x) = 8x^2 + 40x + 32 = 8(x^2 + 5x + 4) = 2^3(x + 1)(x + 4).$$

Procedemos como en el ejemplo anterior. Los factores comunes y no comunes de $p(x)$ y $q(x)$ con la mayor potencia son: $2^2, 3, x + 4, x - 1$ y $x + 1$. Luego, el mínimo común múltiplo de $p(x)$ y $q(x)$ es $h(x) = 2^2 \cdot 3(x + 4)(x - 1)(x + 1)$. Ahora, los factores comunes y no comunes de $h(x)$ y $r(x)$ con la mayor potencia son: $2^3, 3, x - 1, x + 1$ y $x + 4$. Luego, el mínimo común múltiplo de $h(x)$ y $r(x)$ es $2^3 \cdot 3(x - 1)(x + 1)(x + 4)$. Por lo tanto, el mínimo común múltiplo de los tres polinomios es $2^3 \cdot 3(x - 1)(x + 1)(x + 4)$.

Por otro lado, los factores comunes de $p(x)$ y $q(x)$ con la menor potencia son 2 y $x - 1$, por lo que el máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ es $g(x) = 2(x - 1)$. Ahora, el único factor común de $g(x)$ y $r(x)$ con la menor potencia es 2, por lo que el máximo común divisor de $g(x)$ y $r(x)$ es 2. Por lo tanto, el máximo común divisor de los tres polinomios es 2. ■

Ejemplo 1.11.9

Determinar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios $x^2(x^2 + 2y^2) + (y^2 + z^2)(y^2 - z^2)$ y $(x^2 + y^2 + z^2)^2$.

Solución. Factorizando el primer polinomio, obtenemos que

$$\begin{aligned} x^2(x^2 + 2y^2) + (y^2 + z^2)(y^2 - z^2) &= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - z^4 = (x^2 + y^2)^2 - z^4 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 - z^2). \end{aligned}$$

El factor común con la menor potencia es $x^2 + y^2 + z^2$, por lo que el máximo común divisor de los dos polinomios es $x^2 + y^2 + z^2$.

Por otro lado, los factores comunes y no comunes con la mayor potencia son: $(x^2 + y^2 + z^2)^2$ y $x^2 + y^2 - z^2$, por lo que el mínimo común múltiplo de los dos polinomios es $(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2$. ■

Ejemplo 1.11.10

Determinar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios $x^5 - x^4 - x + 1$ y $x^4 - x^3 - x^2 + x$.

Solución. Factorizando cada polinomio, obtenemos que

$$\begin{aligned} p(x) &= x^5 - x^4 - x + 1 = x^4(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^4 - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)^2(x + 1)(x^2 + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(x) &= x^4 - x^3 - x^2 + x = x(x^3 - x^2 - x + 1) = x[x^2(x - 1) - (x - 1)] \\ &= x(x - 1)(x^2 - 1) = x(x - 1)^2(x + 1). \end{aligned}$$

Los factores comunes con la menor potencia son $(x - 1)^2$ y $x + 1$, por lo que el máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ es $(x - 1)^2(x + 1)$.

Por otro lado, los factores comunes y no comunes con la mayor potencia son: $(x - 1)^2$, $x + 1$, $x^2 + 1$ y x , por lo que el mínimo común múltiplo de $p(x)$ y $q(x)$ es $x(x - 1)^2(x + 1)(x^2 + 1)$. ■

Actividad de Aprendizaje 1.11.11

Determina el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios dados.

- 1) (S) 18 y 24.
- 2) (S) $63x^2(x + 1)$ y $14(x + 1)^4$.
- 3) (S) $8x(x + 2)$ y $14(x^2 - 4)$.
- 4) (S) $3x - 2$ y $2 - 3x$.
- 5) (S) $36x^2y^4$, $48x^3y^3z$ y $60x^4y^3z$.
- 6) (S) $2(3x - 2)^2$, $135x^3 - 40$ y $12x - 8$.
- 7) (S) $2x^2 + x - 1$ y $4x^2 - 2x$.
- 8) (S) $(x - 1)^2$ y $x^2 - 1$.
- 9) (S) $(x + 1)^2$ y $x^2 + 1$.
- 10) (S) $x^3 - y^3$ y $(x - y)^3$.
- 11) (S) $x^3 + y^3$ y $(x + y)^3$.
- 12) (S) $x^3 + 3x^2 + 9x$ y $2x^2(x^2 - 9)$.
- 13) (S) $4x^4 - y^2$ y $(2x^2 - y)^2$.
- 14) (S) $24x$, $18xy^2$, $2x^3 + 2x^2 - 40x$ y $8x^4 - 200x^2$.

Actividad de Aprendizaje 1.11.11 (Continuación)

- 15) (SA) $15x^3 + 20x^2 + 5x$, $3x^3 - 3x + x^2 - 1$ y $27x^4 + 18x^3 + 3x^2$.
- 16) (SA) $(x - y)^3$, $x^3 - y^3$, $x^3 - xy^2 + x^2y - y^3$ y $3x + 3y$.
- 17) (SA) $1 - x^3$, $1 - x$, $1 - x^2$ y $1 - 2x + x^2$.
- 18) (SA) $16 - x^4$, $16 + 8x^2 + x^4$ y $16 - 8x^2 + x^4$.
- 19) (SA) $x^2 + xy$, $xy + y^2$ y $x^3 + x^2y$.
- 20) (SA) $(x^2 - 1)^2$, $x^2 - 4x - 5$ y $x^4 - 1$.
- 21) (SA) $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2z^2) + z^4$ y $x^4 + 2x^2z^2 + z^4 - y^4$.
- 22) (SA) $x^6 - x^2$, $x^5 - x^4 + x^3 - x^2$ y $2x^6 + 2x^4 - 2x^3 - 2x$.
- 23) (SA) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ y $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.
- 24) (SA) $p(x)q(x)$, $p(x)r(x)$ y $q(x)r(x)$, donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ denotan polinomios.
- 25) (SS) $x^{12} - y^{12}$, $x^8 - y^8$ y $x^{20} - y^{20}$.
-

CAPÍTULO 2

ECUACIONES RACIONALES E IRRACIONALES

Una **expresión racional** es una fracción donde el numerador y el denominador son polinomios, mientras que una **ecuación racional** es una ecuación que contiene expresiones racionales. Las expresiones racionales son una extensión de las fracciones y, el proceso de simplificación así como las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, funcionan de manera similar como lo veremos en este capítulo y aprenderemos a resolver ecuaciones racionales con una incógnita. Para tener éxito debemos tener una plena comprensión de las técnicas de factorización vistas en el Capítulo 1. De manera muy particular, estudiaremos la ecuación cuadrática con una incógnita y veremos las relaciones que hay entre sus coeficientes y raíces. En la última sección del capítulo veremos algunas estrategias de resolución de una **ecuación irracional**.

Expresión racional (2.0.1)

Una **expresión racional** es una expresión de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$. Algunos ejemplos de expresiones racionales son

$$\frac{3}{x+4}, \quad \frac{2x}{x^2-4x+4}, \quad \frac{x^2-5x}{x^2+2x-3}.$$

Observación 2.0.2

Observa que el denominador de una expresión racional no puede ser igual a 0 porque la división entre 0 no está definida.

En este capítulo siempre supondremos que los valores de las variables que hacen un denominador de una expresión racional igual a cero, quedan excluidos. Por ejemplo, si escribimos $\frac{3}{x+4}$, suponemos que $x \neq -4$, aunque esto no se indique de manera explícita.

2.1. Simplificación de expresiones racionales

Así como sucede con las fracciones numéricas, una expresión racional se dice que está **simplificada** o **reducida** si su numerador y denominador no tiene factores comunes diferentes de ± 1 .

Simplificación de expresiones racionales (2.1.1)

Para simplificar una expresión racional

- 1) Factorizamos de la manera más completa posible el numerador y el denominador.
- 2) Dividimos el numerador y el denominador entre los factores comunes, esto es, cancelamos los factores comunes del numerador y el denominador.

Ejemplo 2.1.2

Simplificar la expresión racional $\frac{2x^3 - 6x}{6x^2}$.

Solución. Observemos que el denominador ya está factorizado. Factorizando el numerador, obtenemos que

$$\frac{2x^3 - 6x}{6x^2} = \frac{2x(x^2 - 3)}{6x^2} = \frac{x^2 - 3}{3x}.$$



Ejemplo 2.1.3

Simplificar $\frac{a-b}{b-a}$.

Solución. Observemos que $a-b = -(b-a)$. Entonces,

$$\frac{a-b}{b-a} = \frac{-(b-a)}{b-a} = -1.$$

■

Ejemplo 2.1.4

Simplificar $\frac{x^3 - 16x}{x^2 - 2x - 8}$.

Solución. Factorizando el numerador y el denominador, obtenemos que

$$\frac{x^3 - 16x}{x^2 - 2x - 8} = \frac{x(x^2 - 16)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x(x+4)(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x(x+4)}{x+2}.$$

■

Ejemplo 2.1.5

Simplificar $\frac{x^3 + (2a+b)x^2 + (a^2 + 2ab)x + a^2b}{x^3 + (a+2b)x^2 + (b^2 + 2ab)x + ab^2}$, donde a y b son números reales.

Solución. Efectuando las operaciones indicadas en el numerador y en el denominador, obtenemos la expresión racional

$$\frac{x^3 + 2ax^2 + bx^2 + a^2x + 2abx + a^2b}{x^3 + ax^2 + 2bx^2 + b^2x + 2abx + ab^2}.$$

Factorizando por agrupación y agrupando convenientemente, obtenemos

$$\frac{x(x^2 + 2ax + a^2) + b(x^2 + 2ax + a^2)}{x(x^2 + 2bx + b^2) + a(x^2 + 2bx + b^2)}.$$

Observando que cada paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto, obtenemos

$$\frac{x(x+a)^2 + b(x+a)^2}{x(x+b)^2 + a(x+b)^2} = \frac{(x+a)^2(x+b)}{(x+b)^2(x+a)} = \frac{x+a}{x+b}.$$



Actividad de Aprendizaje 2.1.6

1) Simplifica las siguientes expresiones racionales.

a) (S) $\frac{24xy^4}{16x^3z}.$

b) (S) $\frac{x+3}{x^2+6x+9}.$

c) (S) $\frac{5xy+3x^2y^2}{xy^3}.$

d) (S) $\frac{56x^2-3x-20}{49x^2-16}.$

e) (S) $\frac{2x^2+3x-5}{7-6x-x^2}.$

f) (S) $\frac{3x^2-12y^2}{x^2+4xy+4y^2}.$

g) (SA) $\frac{(x-3)(x-15)+27}{(x-8)(x-24)+48}.$

h) (SA) $\frac{[(x+y)^2+(x-y)^2]^2-4(x+y)^2(x-y)^2}{(x^4+y^4)^2-(x^4-y^4)^2}.$

i) (SA) $\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)},$ donde a y b denotan números reales.

2) (SA) Determina el polinomio que debe colocarse en el área marcada con el símbolo ? para obtener una igualdad verdadera. Explica cómo obtuviste tu respuesta.

a) $\frac{?}{x^2+2x-15} = \frac{1}{x-3}.$

b) $\frac{?}{3x+2} = x-3.$

c) $\frac{y^2-y-20}{?} = \frac{y+4}{y+1}.$

Actividad de Aprendizaje 2.1.6 (Continuación)

d) $\frac{?}{6p^2 + p - 15} = \frac{2p - 1}{2p - 3}.$

3) (SA) Un rectángulo tiene área $3a^2 + 7ab + 2b^2$ y uno de sus lados mide $2a + 4b$. Determina la longitud del otro lado en términos de a y b .

4) (SS) Si $a + b + c = 0$, determina el valor numérico de $\frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$

5) (SS) Si $a + b + c = 0$, simplifica la expresión racional

$$\frac{a^9 + b^9 + c^9 - 3a^3b^3c^3}{9abc}$$

y escribe tu respuesta en términos de b y c .

2.2. Multiplicación y división de expresiones racionales

Las reglas para multiplicar y dividir dos expresiones racionales, son como las reglas que usamos para multiplicar y dividir fracciones numéricas.

Multiplicación de expresiones racionales (2.2.1)

Para multiplicar expresiones racionales, utilizamos la siguiente regla

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0.$$

Para multiplicar expresiones racionales, seguimos estos pasos.

- 1) Factorizamos tanto como sea posible todos los numeradores y denominadores.
- 2) Cancelamos los factores comunes.
- 3) Realizamos la multiplicación usando la regla anterior.
- 4) Cuando sea posible, simplificamos la respuesta.

Ejemplo 2.2.2

Realizar el producto $\frac{4x^3y}{3xy^4} \cdot \frac{-6x^2y^2}{10x^4}$.

Solución. En este caso, todos los numeradores y denominadores ya están factorizados, por lo que procedemos a cancelar los factores comunes en cada expresión racional y luego realizamos el producto de las fracciones siguiendo la regla antes descrita. Por último simplificamos la respuesta. El resultado es

$$\frac{4x^3y}{3xy^4} \cdot \frac{-6x^2y^2}{10x^4} = \frac{4x^2}{3y^3} \cdot \frac{-3y^2}{5x^2} = \frac{(4x^2)(-3y^2)}{(3y^3)(5x^2)} = \frac{-4}{5y}.$$

**Ejemplo 2.2.3**

Realizar el producto $\frac{x-y}{y^2-x^2} \cdot \frac{x^2-xy-2y^2}{3x-6y}$.

Solución. Comenzamos factorizando los numeradores y denominadores que no están factorizados y cancelamos los factores comunes. El resultado es

$$\frac{x-y}{y^2-x^2} \cdot \frac{x^2-xy-2y^2}{3x-6y} = \frac{x-y}{(y-x)(y+x)} \cdot \frac{(x-2y)(x+y)}{3(x-2y)} = \frac{-1}{x+y} \cdot \frac{x+y}{3}.$$

Por último realizamos el producto y simplificamos la respuesta. El resultado es

$$\frac{x-y}{y^2-x^2} \cdot \frac{x^2-xy-2y^2}{3x-6y} = \frac{-(x+y)}{3(x+y)} = -\frac{1}{3}.$$

**Ejemplo 2.2.4**

Multiplicar $\frac{ab-ac+bd-cd}{ab+ac+bd+cd} \cdot \frac{b^2+bc+bd+cd}{b^2+bd-bc-cd}$.

Solución. Comenzamos factorizando los numeradores y denominadores mediante agrupación y luego cancelamos los factores comunes. El resultado es

$$\begin{aligned}\frac{ab - ac + bd - cd}{ab + ac + bd + cd} \cdot \frac{b^2 + bc + bd + cd}{b^2 + bd - bc - cd} &= \frac{a(b - c) + d(b - c)}{a(b + c) + d(b + c)} \cdot \frac{b(b + c) + d(b + c)}{b(b + d) - c(b + d)} \\ &= \frac{(b - c)(a + d)}{(b + c)(a + d)} \cdot \frac{(b + c)(b + d)}{(b + d)(b - c)} \\ &= \frac{b - c}{b + c} \cdot \frac{b + c}{b - c}.\end{aligned}$$

Ahora procedemos a realizar la multiplicación y a simplificar la respuesta final. El resultado es

$$\frac{ab - ac + bd - cd}{ab + ac + bd + cd} \cdot \frac{b^2 + bc + bd + cd}{b^2 + bd - bc - cd} = \frac{(b - c)(b + c)}{(b + c)(b - c)} = 1.$$

División de expresiones racionales (2.2.5)

Para dividir expresiones racionales, utilizamos la siguiente regla

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0.$$

En otras palabras, para dividir expresiones racionales primero invertimos el divisor (la segunda fracción) y procedemos como cuando multiplicamos expresiones racionales.

Ejemplo 2.2.6

Realizar la división $\frac{x}{x+3} \div \frac{4}{x-1}$.

Solución. Invertimos el divisor y multiplicamos. El resultado es

$$\frac{x}{x+3} \div \frac{4}{x-1} = \frac{x}{x+3} \cdot \frac{x-1}{4} = \frac{x(x-1)}{4(x+3)}.$$

Ejemplo 2.2.7

Realizar la división $\frac{x^2 - y^2}{2x + 2y} \div \frac{2x^2 - 3xy + y^2}{6x + 2y}$.

Solución. Invertimos el divisor y efectuamos el producto. El resultado es

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{2x + 2y} \div \frac{2x^2 - 3xy + y^2}{6x + 2y} &= \frac{x^2 - y^2}{2x + 2y} \cdot \frac{6x + 2y}{2x^2 - 3xy + y^2} \\ &= \frac{(x - y)(x + y)}{2(x + y)} \cdot \frac{2(3x + y)}{(2x - y)(x - y)} \\ &= \frac{x - y}{2} \cdot \frac{2(3x + y)}{(2x - y)(x - y)} \\ &= \frac{(x - y)2(3x + y)}{2(2x - y)(x - y)} = \frac{3x + y}{2x - y}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.2.8**

Simplificar $\left(\frac{x^2}{9} \cdot \frac{3(x + 4)}{x^2 + 2x}\right) \div \frac{x}{x + 2}$.

Solución.

$$\left(\frac{x^2}{9} \cdot \frac{3(x + 4)}{x^2 + 2x}\right) \div \frac{x}{x + 2} = \frac{x^2}{9} \cdot \frac{3(x + 4)}{x^2 + 2x} \cdot \frac{x + 2}{x} = \frac{x^2}{9} \cdot \frac{3(x + 4)}{x(x + 2)} \cdot \frac{x + 2}{x} = \frac{x + 4}{3}.$$

**Actividad de Aprendizaje 2.2.9**

1) Realiza las operaciones indicadas.

a) (S) $\frac{(2x - 3)(x + 8)}{x^3} \cdot \frac{x}{3 - 2x}$.

b) (S) $\frac{x^2 - 16}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 6x + 8}$.

$$\text{c) (S)} \frac{x^2 + 2xy - 3y^2}{(x + y)^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x + 3y}.$$

$$\text{d) (S)} \frac{xu - yu + xv - yv}{xu + yu - xv - yv} \cdot \frac{xu + yu + xv + yv}{xu - yu - xv + yv}.$$

$$\text{e) (S)} \frac{(x^3y)^2}{(x + 2y)^2} \div \frac{x^2y}{(x + 2y)^3}.$$

$$\text{f) (S)} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 11x + 30} \div \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 + 2x - 24}.$$

$$\text{g) (S)} \left(\frac{xy + y}{4x} \div (3x + 3) \right) \div \frac{y}{3x}.$$

$$\text{h) (S)} \frac{2x^2 + 5x - 25}{3x^2 + 5x + 2} \cdot \frac{3x^2 + 2x}{x + 5} \div \left(\frac{x}{x + 1} \right)^2.$$

$$\text{i) (SA)} x^3 \cdot \frac{x^{2n} - 9}{x^{2n} + 4x^n + 3} \div \frac{x^{2n} - 2x^n - 3}{x}, \text{ donde } n \text{ es un entero positivo.}$$

$$\text{j) (SA)} \frac{x^{n+1} - 8x}{x^{2n} + 2x^n + 1} \cdot \frac{x^{2n} - 4x^n - 5}{x} \div x^n, \text{ donde } n \text{ es un entero positivo.}$$

- 2) (SA) Determina el polinomio que debe colocarse en el área marcada con el símbolo ? para obtener una igualdad verdadera. Explica cómo obtuviste tu respuesta.

$$\text{a)} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3} \cdot \frac{?}{x^2 - 2x - 8} = 1.$$

$$\text{b)} \frac{x^2 - 4}{(x + 2)^2} \cdot \frac{2x^2 + x - 6}{?} = \frac{x - 2}{2x + 5}.$$

$$\text{c)} \frac{x^2 - 9}{2x^2 + 3x - 2} \div \frac{2x^2 - 9x + 9}{?} = \frac{x + 3}{2x - 1}.$$

$$\text{d)} \frac{4r^2 - r - 18}{?} \div \frac{4r^3 - 9r^2}{6r^2 - 9r + 3} = \frac{3(r - 1)}{r^2}.$$

- 3) (SA) Un trapecio de bases a y b tiene área igual a $a^2 + 2ab + b^2$. Determina su altura en términos de a y b .

- 4) (SA) Realiza las operaciones indicadas.

$$\left(\frac{2x^2 - 3x - 14}{2x^2 - 9x + 7} \div \frac{6x^2 + x - 15}{3x^2 + 2x - 5} \right) \cdot \frac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3}.$$

Actividad de Aprendizaje 2.2.9 (Continuación)

5) (SA) Realiza las operaciones indicadas.

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{2a^2 - 3ab + b^2} \cdot \frac{2a^2 - 7ab + 3b^2}{a^2 + ab} \right) \div \frac{ab - 3b^2}{a^2 + 2ab + b^2}.$$

2.3. Suma y resta de expresiones racionales

El método para sumar o restar dos expresiones racionales, es idéntico a como se suman o restan dos fracciones.

Suma y resta de expresiones racionales (2.3.1)

Para sumar o restar dos expresiones racionales con un común denominador, sumamos o restamos los numeradores y conservamos el denominador común. En símbolos

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \quad c \neq 0.$$

En el caso en que las expresiones racionales tienen denominadores distintos, el procedimiento es el siguiente

- 1) Determinar el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- 2) Reescribir cada fracción como una fracción equivalente con el mínimo común múltiplo en el denominador. Esto se hace multiplicando el numerador y el denominador de cada fracción por los factores necesarios para obtener el mínimo común múltiplo como denominador.
- 3) Conservar el denominador en forma factorizada, pero desarrollar el numerador.
- 4) Sumar o restar los numeradores, conservando el mínimo común múltiplo en el denominador.
- 5) Cuando sea posible, reducir la fracción factorizando el numerador.

Ejemplo 2.3.2

Efectuar $\frac{x^2 - 26}{x - 5} - \frac{2x + 4}{x - 5} + \frac{10 + x}{x - 5}$.

Solución. Como se trata del mismo denominador, solo debemos sumar los numeradores manteniendo el mismo denominador y simplificar la respuesta final.

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 26}{x - 5} - \frac{2x + 4}{x - 5} + \frac{10 + x}{x - 5} &= \frac{(x^2 - 26) - (2x + 4) + (10 + x)}{x - 5} \\ &= \frac{x^2 - x - 20}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 4)}{x - 5} \\ &= x + 4.\end{aligned}$$

**Ejemplo 2.3.3**

Efectuar la suma $\frac{6x}{x^2 - 4} + \frac{3}{2 - x}$.

Solución. El mínimo común múltiplo de los polinomios $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ y $x - 2$ es $(x - 2)(x + 2)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{6x}{x^2 - 4} + \frac{3}{2 - x} &= \frac{6x}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{3(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{6x - 3(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{3(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{3}{x + 2}.\end{aligned}$$

**Ejemplo 2.3.4**

Efectuar la suma $\frac{5}{x - y} + \frac{5}{x^2 - y^2}$.

Solución. El mínimo común múltiplo de $x - y$ y $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ es $(x - y)(x + y)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{5}{x - y} + \frac{5}{x^2 - y^2} &= \frac{5(x + y)}{(x - y)(x + y)} + \frac{5}{(x - y)(x + y)} = \frac{5(x + y) + 5}{(x - y)(x + y)} \\ &= \frac{5(x + y + 1)}{(x - y)(x + y)}.\end{aligned}$$



Ejemplo 2.3.5

Efectuar la resta $\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^2 + 1}$.

Solución. El mínimo común múltiplo de x^2 y $x^2 + 1$ es $x^2(x^2 + 1)$. Entonces,

$$\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^2 + 1} = \frac{4(x^2 + 1)}{x^2(x^2 + 1)} - \frac{4x^2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{4(x^2 + 1) - 4x^2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{4}{x^2(x^2 + 1)}.$$



Ejemplo 2.3.6

Efectuar la resta $\frac{3x + 4}{2x^2 - 5x - 12} - \frac{2x - 3}{5x^2 - 18x - 8}$.

Solución. El mínimo común múltiplo de $2x^2 - 5x - 12 = (2x + 3)(x - 4)$ y de $5x^2 - 18x - 8 = (5x + 2)(x - 4)$ es $(2x + 3)(x - 4)(5x + 2)$. Entonces,

$$\begin{aligned}&\frac{3x + 4}{2x^2 - 5x - 12} - \frac{2x - 3}{5x^2 - 18x - 8} \\ &= \frac{3x + 4}{(2x + 3)(x - 4)} - \frac{2x - 3}{(5x + 2)(x - 4)} \\ &= \frac{(3x + 4)(5x + 2)}{(2x + 3)(x - 4)(5x + 2)} - \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{(2x + 3)(x - 4)(5x + 2)} \\ &= \frac{(3x + 4)(5x + 2) - (2x - 3)(2x + 3)}{(2x + 3)(x - 4)(5x + 2)} \\ &= \frac{15x^2 + 26x + 8 - (4x^2 - 9)}{(2x + 3)(x - 4)(5x + 2)} = \frac{11x^2 + 26x + 17}{(2x + 3)(x - 4)(5x + 2)}.\end{aligned}$$



Ejemplo 2.3.7

Si a , b y c denotan números reales, efectuar la suma

$$\frac{4ab + 2b^2 - 12a^2}{3(a^2 - b^2)} + \frac{b - 2a}{b - a} + \frac{7a}{3(a + b)}.$$

Solución. El mínimo común múltiplo de los denominadores es $3(a - b)(a + b)$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2}{3(a^2 - b^2)} + \frac{b - 2a}{b - a} + \frac{7a}{3(a + b)} \\ &= \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2}{3(a - b)(a + b)} - \frac{3(b - 2a)(a + b)}{3(a - b)(a + b)} + \frac{7a(a - b)}{3(a - b)(a + b)} \\ &= \frac{(4ab + 2b^2 - 12a^2) - 3(b - 2a)(a + b) + 7a(a - b)}{3(a - b)(a + b)} \\ &= \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2 + 6a^2 + 3ab - 3b^2 + 7a^2 - 7ab}{3(a - b)(a + b)} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{3(a - b)(a + b)} = \frac{(a - b)(a + b)}{3(a - b)(a + b)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.3.8**

Efectuar la suma $\frac{x^4 - (x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2 - 1)^2}{x^2(x + 1)^2 - 1} + \frac{x^2(x - 1)^2 - 1}{x^4 - (x + 1)^2}.$

Solución. Antes de hacer la suma vamos a simplificar cada expresión racional.

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - (x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2 - x^2} &= \frac{(x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1)}{(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)} = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}, \\ \frac{x^2 - (x^2 - 1)^2}{x^2(x + 1)^2 - 1} &= \frac{(x + x^2 - 1)(x - x^2 + 1)}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1)} = \frac{-x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1}, \\ \frac{x^2(x - 1)^2 - 1}{x^4 - (x + 1)^2} &= \frac{(x^2 - x + 1)(x^2 - x - 1)}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1)} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^4 - (x+1)^2} \\
 &= \frac{x^2+x-1}{x^2+x+1} + \frac{-x^2+x+1}{x^2+x+1} + \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \\
 &= \frac{(x^2+x-1) + (-x^2+x+1) + (x^2-x+1)}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1}{x^2+x+1} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$



Actividad de Aprendizaje 2.3.9

- 1) (S) Efectúa $\frac{x^2-4x}{x-3} + \frac{10-4x}{x-3} - \frac{x-8}{x-3}$.
- 2) (S) Efectúa $\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x+3}$.
- 3) (S) Efectúa $\frac{5}{2} - \frac{1}{2x} - \frac{3}{x+1}$.
- 4) (S) Efectúa la suma $\frac{3x}{x^2-x-12} + \frac{x-4}{x^2+3x}$.
- 5) (S) Efectúa la suma $\frac{x-8}{x^2-25} + \frac{9x}{x^2-10x+25}$.
- 6) (S) Efectúa la suma $\frac{a}{(a-b)(c-a)} + \frac{b}{(b-c)(a-b)} + \frac{c}{(c-a)(b-c)}$,
donde a, b y c denotan números reales.
- 7) (S) Efectúa las operaciones indicadas.
 - a) $\left(3 + \frac{1}{x+3}\right) \left(\frac{x+3}{x-2}\right)$.
 - b) $\left(\frac{3}{r+1} - \frac{4}{r-2}\right) \left(\frac{r-2}{r+10}\right)$.
 - c) $\left(\frac{5}{a-5} - \frac{2}{a+3}\right) \div (3a+25)$.
 - d) $\left(\frac{x^2+4x-5}{2x^2+x-3} \cdot \frac{2x+3}{x+1}\right) - \frac{2}{x+2}$.
 - e) $\left(\frac{x+5}{x^2-25} + \frac{1}{x+5}\right) \left(\frac{2x^2-13x+15}{4x^2-6x}\right)$.

Actividad de Aprendizaje 2.3.9 (Continuación)

- 8) (SA) Determina el polinomio que debe colocarse en el área marcada con el símbolo ? para obtener una igualdad verdadera. Explica cómo obtuviste tu respuesta.

$$a) \frac{5x^2 - 6}{x^2 - x - 1} - \frac{?}{x^2 - x - 1} = \frac{-2x^2 + 6x - 12}{x^2 - x - 1}.$$

$$b) \frac{r^2 - 6}{r^2 - 5r + 6} - \frac{?}{r^2 - 5r + 6} = \frac{1}{r - 2}.$$

- 9) (SA) El promedio ponderado de dos valores a y b está dado por $a\left(\frac{x}{n}\right) + b\left(\frac{n-x}{n}\right)$, donde $\frac{x}{n}$ es el peso dado a a y $\frac{n-x}{n}$ es el peso dado a b .

- a) Expresa esta suma como una sola fracción.
 b) En un examen a una persona recibió una calificación de 60 y en un examen b obtuvo 92. Si el examen a cuenta $\frac{2}{5}$ de la calificación final y el examen b cuenta $\frac{3}{5}$, determina su promedio ponderado.

- 10) (SA) Efectúa la siguiente suma

$$\frac{a - b}{(b + c - a)(b - c - a)} + \frac{b - c}{(c + a - b)(c - a - b)} + \frac{c - a}{(a + b - c)(a - b - c)},$$

donde a , b y c denotan números reales.

- 11) (SS) Si $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4$, determina el valor numérico de $\frac{2a + 4ab - 2b}{a - b - 2ab}$.

- 12) (SS) Si $a + b + c = 0$, determina el valor numérico de la suma

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}.$$

2.4. Fracciones complejas

Una **fracción compleja** es aquella que contiene una expresión racional en su numerador o en su denominador. Algunos ejemplos de fracciones complejas son,

$$\frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}, \quad \frac{\frac{2}{3}}{5}, \quad \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)}{4x}, \quad \frac{\left(9 + \frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{8}{x}\right)}.$$

Simplificar una fracción compleja, significa escribirla eliminando las expresiones racionales de su numerador y de su denominador.

Para simplificar una fracción compleja:

- 1) Se simplifican el numerador y el denominador.
- 2) Se realiza la división de las dos fracciones que resultan.

Ejemplo 2.4.1

Simplificar $\frac{2a}{\left(\frac{a}{x+1}\right)}$.

Solución.

$$\frac{2a}{\left(\frac{a}{x+1}\right)} = 2a \cdot \frac{x+1}{a} = 2(x+1).$$

■

Ejemplo 2.4.2

Simplificar $\frac{\left(\frac{2}{a-b}\right)}{a-b}$.

Solución.

$$\frac{\left(\frac{2}{a-b}\right)}{a-b} = \frac{2}{a-b} \cdot \frac{1}{a-b} = \frac{2}{(a-b)^2}.$$

■

Ejemplo 2.4.3

Simplificar $\frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$.

Solución. Primero efectuamos las operaciones del numerador y denominador de la fracción compleja y luego hacemos la división.

$$\frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)}{\left(\frac{x + 1}{x}\right)} = \frac{x^2 - 1}{x} \cdot \frac{x}{x + 1} = \frac{(x^2 - 1)x}{x(x + 1)} = \frac{x(x - 1)(x + 1)}{x(x + 1)} = x - 1.$$



Ejemplo 2.4.4

Simplificar $\frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 + \frac{a-b}{a+b}}$, siendo a y b números reales.

Solución. Primero simplifcamos el numerador y el denominador de la fracción compleja.

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} &= \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{4ab}{(a-b)(a+b)}, \\ 1 + \frac{a-b}{a+b} &= \frac{(a+b) + (a-b)}{a+b} = \frac{2a}{a+b}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 + \frac{a-b}{a+b}} = \frac{\frac{4ab}{(a-b)(a+b)}}{\frac{2a}{a+b}} = \frac{4ab}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{a+b}{2a} = \frac{2b}{a-b}.$$



Ejemplo 2.4.5

Simplificar $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$.

Solución.

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{x+1}{x}}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x+1-x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = x+1.$$

**Actividad de Aprendizaje 2.4.6**

1) (S) Simplifica $\frac{a+b}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

2) (S) Simplifica $\frac{2 + \frac{1}{x}}{2x^2 + x}$.

3) (S) Simplifica $\frac{x + \frac{2x}{x-2}}{1 + \frac{4}{x^2-4}}$.

4) (S) Simplifica $\frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}$.

5) (S) Simplifica $\frac{a}{1 - \frac{1}{1 + \frac{a}{b}}}$.

6) (S) Simplifica $2 - \frac{2}{1 - \frac{2}{2 - \frac{2}{x^2}}}$.

7) (SA) Explica dónde está el error en el siguiente desarrollo.

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{b} = \frac{a}{\left(\frac{b}{b}\right)} = \frac{a}{1} = a.$$

8) (SA) Simplifica $((a^6 - b^6) \div (a^3 - b^3)) \div (a^2 - ab + b^2)$.

Actividad de Aprendizaje 2.4.6 (Continuación)

9) (SS) Sean a, b y c números reales tales que $b = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$ y $c = \frac{a+b}{2}$. Si

$a \neq b$, determina el valor numérico de $2a + b$.

10) (SS) Si a, b y c son números reales positivos tales que $abc = 1$, determina el valor numérico de la suma

$$\frac{1+a}{1+a+ab} + \frac{1+b}{1+b+bc} + \frac{1+c}{1+c+ca}.$$

2.5. Ecuaciones cuadráticas con una incógnita

Una **ecuación cuadrática** o **ecuación de segundo grado** con una incógnita, es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde x es la incógnita, a, b y c son números reales o complejos y $a \neq 0$.

Una manera de resolver una ecuación cuadrática es factorizando el polinomio cuadrático.

Ejemplo 2.5.1

Resolver la ecuación $2x^2 + x - 21 = 0$.

Solución. Factorizando el lado izquierdo, obtenemos que $(2x - 7)(x - 3) = 0$, lo cual implica que $2x - 7 = 0$ o $x - 3 = 0$. De la primera ecuación, obtenemos la solución $x = \frac{7}{2}$ y, de la segunda ecuación, obtenemos la solución $x = 3$. ■

La fórmula general (2.5.2)

Dado que no siempre es posible factorizar, otra forma de resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es la siguiente: Dividiendo la ecuación entre $a \neq 0$, obtenemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Para completar el trinomio cuadrado perfecto, necesitamos un nuevo término constante. Así que primero movemos el término constante viejo al

lado derecho de la ecuación, obteniendo la ecuación

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Ahora necesitamos un término constante que nos lleve a la forma $x^2 + 2mx + m^2$. El coeficiente de x , $2m$, debemos dividirlo entre 2 y luego elevar al cuadrado, para obtener el término constante m^2 . En nuestra ecuación cuadrática, el coeficiente de x es $\frac{b}{a}$, así que debemos sumar $(b/2a)^2$ de ambos lados de la ecuación. De esta manera, obtenemos que

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

El lado izquierdo de esta ecuación es un trinomio cuadrado perfecto. Luego, tenemos que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Por último, tomando raíz cuadrada de ambos lados, obtenemos que

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

De aquí ya solo despejamos x , lo que nos da

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2.1)$$

Esta fórmula, es conocida como **fórmula general** para resolver una ecuación cuadrática. El número $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación.

La fórmula general (2.1) es una herramienta que permite resolver ecuaciones cuadráticas de una forma muy simple.

Ejemplo 2.5.3

Las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 + x - 1 = 0$ son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Cuando los coeficientes de una ecuación cuadrática son números reales, po-

demos determinar inmediatamente si sus raíces son números reales o números complejos, observando el signo del discriminante.

Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un número complejo (no real).

Si $b^2 - 4ac \geq 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un número real. Más aún, si el discriminante es igual a 0, las dos raíces de la ecuación son iguales, ya que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}.$$

Esto lo resumimos a continuación.

Criterio del discriminante (2.5.4)

Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con a , b y c números reales y $a \neq 0$, tenemos que

- 1) Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
- 2) Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene una única solución real.
- 3) Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones complejas (no reales).

Ejemplo 2.5.5

Resolver la ecuación $4x^2 - 5x = 19$.

Solución. Igualando a cero, tenemos la ecuación cuadrática $4x^2 - 5x - 19 = 0$. Su discriminante es $(-5)^2 - 4(4)(-19) > 0$, lo que significa que la ecuación tiene dos raíces reales distintas según (2.5.4). Usando la fórmula general (2.1) con $a = 4$, $b = -5$ y $c = -19$, obtenemos las soluciones $\frac{5 + \sqrt{329}}{8}$ y $\frac{5 - \sqrt{329}}{8}$. ■

Ejemplo 2.5.6

Determinar los números k tales que la ecuación $x^2 + 2(k+2)x + 9k = 0$ tenga sus dos raíces iguales.

Solución. Para que las dos raíces de la ecuación sean iguales, debemos tener que su discriminante debe ser cero, según (2.5.4). El discriminante de la ecuación es

$$[2(k+2)]^2 - 4(9k).$$

Entonces, debemos resolver la ecuación $[2(k+2)]^2 - 4(9k) = 0$. Simplificando esta ecuación, obtenemos la ecuación $k^2 - 5k + 4 = 0$ que es una ecuación cuadrática en k . Factorizando, obtenemos que $(k-4)(k-1) = 0$, de donde se sigue que $k = 4$ o $k = 1$. ■

El siguiente ejemplo es a cerca de una ecuación cúbica que da lugar a una ecuación cuadrática y a una ecuación lineal.

Ejemplo 2.5.7

Resolver la ecuación $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$.

Solución. Factorizando por agrupación, tenemos que

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = x^2(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(x^2+3) = 0,$$

esto es, $x+2 = 0$ o $x^2+3 = 0$.

Si $x+2 = 0$, entonces $x = -2$. Si $x^2+3 = 0$, entonces $x = \pm\sqrt{-3}$. Por lo tanto, la ecuación tiene una raíz real (-2) y dos raíces complejas ($\sqrt{-3}$ y $-\sqrt{-3}$). ■

Si sumamos las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, obtenemos que

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Si ahora multiplicamos las raíces, obtenemos que

$$\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Estas fórmulas que relacionan a los coeficientes con las raíces de una ecuación cuadrática, son llamadas **fórmulas de Vieta**. A continuación resumimos esta información.

Fórmulas de Vieta (2.5.8)

Si r y s son las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$r + s = -\frac{b}{a},$$

$$rs = \frac{c}{a}.$$

En particular, si $a = 1$, tenemos que $r + s = -b$ y $rs = c$.

Ejemplo 2.5.9

Sean α y β las raíces de la ecuación $x^2 - px + q = 0$. Formar una ecuación cuadrática cuyos coeficientes estén en función de p y q , que tenga como raíces, a α^2 y β^2 .

Solución. La ecuación $(x - \alpha^2)(x - \beta^2) = x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$ tiene como raíces a α^2 y β^2 . Luego, basta escribir a $\alpha^2 + \beta^2$ y a $\alpha^2\beta^2$ en función de p y q . Aplicando las fórmulas de Vieta a la ecuación $x^2 - px + q = 0$, obtenemos las relaciones $\alpha + \beta = p$ y $\alpha\beta = q$. Esto implica que,

$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = q^2,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = p^2 - 2q.$$

Por lo tanto, una ecuación que cumple el problema es $x^2 + (2q - p^2)x + q^2 = 0$. ■

Ejemplo 2.5.10

Sea $m \geq -1$ un número real. Si la ecuación en x

$$x^2 + 2(m - 2)x + m^2 - 3m + 3 = 0$$

tiene dos raíces reales distintas r y s tales que $r^2 + s^2 = 6$, determinar el valor de m .

Solución. Como la ecuación tiene dos raíces reales distintas, su discriminante debe ser positivo, esto es, $4(m - 2)^2 - 4(m^2 - 3m + 3) = -4m + 4 > 0$, de donde se sigue que $m < 1$. Por lo tanto, $-1 \leq m < 1$.

Por otro lado, aplicando las fórmulas de Vieta, tenemos que $r + s = -2(m - 2)$ y $rs = m^2 - 3m + 3$. Entonces,

$$6 = r^2 + s^2 = (r + s)^2 - 2rs = 4(m - 2)^2 - 2(m^2 - 3m + 3) = 2m^2 - 10m + 10,$$

esto es, $m^2 - 5m + 2 = 0$. Usando la fórmula general (2.1) con $a = 1$, $b = -5$ y $c = 2$, obtenemos las soluciones $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$. Como $-1 \leq m < 1$, concluimos que el valor de m buscado es $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$. ■

Ejemplo 2.5.11

Determinar todos los valores de m para que las raíces de la ecuación

$$mx^2 - (m + 3)x + 2m + 1 = 0$$

difieran en 2 unidades.

Solución. Si r y s son las raíces de la ecuación, entonces aplicando las Fórmulas de Vieta (2.5.8), debemos tener que

$$\begin{aligned} r + s &= \frac{m + 3}{m}, \\ rs &= \frac{2m + 1}{m}. \end{aligned}$$

Por otro lado, una condición del problema es que

$$r - s = 2.$$

Sumando la primera ecuación con la tercera ecuación y simplificando, obtenemos que

$$r = \frac{\frac{m + 3}{m} + 2}{2} = \frac{m + 3 + 2m}{2m} = \frac{3 + 3m}{2m}.$$

Si ahora a la primera ecuación le restamos la tercera ecuación y simplificamos, obtenemos que

$$s = \frac{\frac{m + 3}{m} - 2}{2} = \frac{m + 3 - 2m}{2m} = \frac{3 - m}{2m}.$$

Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación, obtenemos que

$$\left(\frac{3 + 3m}{2m} \right) \left(\frac{3 - m}{2m} \right) = \frac{2m + 1}{m},$$

esto es, $\frac{9 - 3m + 9m - 3m^2}{4m^2} = \frac{2m + 1}{m}$. Multiplicando ahora cada lado de esta ecuación por $4m^2$, obtenemos que $9 + 6m - 3m^2 = 8m^2 + 4m$, esto es, $11m^2 - 2m - 9 = 0$. Factorizando, resulta que $(11m + 9)(m - 1) = 0$, de donde $11m + 9 = 0$ o $m - 1 = 0$, esto es, $m = -9/11$ o $m = 1$. ■

Actividad de Aprendizaje 2.5.12

- 1) (S) Si se sabe que a es una raíz de la ecuación $x^2 - x - 3 = 0$, determina el valor del cociente

$$\frac{a^3 + 1}{a^5 - a^4 - a^3 + a^2}.$$

- 2) (S) Resuelve las siguientes ecuaciones en los números reales.

a) $x^2 + 3x + 1 = 0$.

b) $4x^2 - x + 7 = 0$.

c) $x^2 - \frac{4}{3} = x$.

d) $0.2 - 0.1x^2 = x$.

e) $\sqrt{5}x^2 - (8\sqrt{5} + 10)x + (20\sqrt{5} + 40) = 0$. (Sugerencia: Primero multiplica toda la ecuación por $\sqrt{5}$ y simplifica).

- 3) (S) Sea p un número real distinto de cero. Si las raíces de la ecuación

$$\frac{p^2}{2}x^2 + 2px + \frac{p^2}{2} = 0$$

son iguales, determina el valor de p^2 .

- 4) (S) Sean a y b números reales. Si $a \neq b$, $a^2 + 3a + 1 = 0$ y $b^2 + 3b + 1 = 0$, determina el valor de la suma $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

- 5) (SA) Sean α y β las raíces de la ecuación $x^2 - px + q = 0$. Construye una ecuación cuadrática cuyos coeficientes estén en función de p y q y, que tenga como raíces, a α^3 y β^3 .

- 6) (SA) Determina las raíces de la ecuación $ax^2 - (a - 5)x + 1 = 0$ sabiendo que su producto es igual a su diferencia.

- 7) (SA) Determina todos los números reales m tales que una raíz de la ecuación

$$x^2 - (3m - 2)x + (m^2 - 1) = 0$$

sea el triple de la otra.

Actividad de Aprendizaje 2.5.12 (Continuación)

- 8) (SA) Resuelve la ecuación $x^6 - 64 = 0$ en los números complejos.
- 9) (SA) Resuelve la ecuación $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ en los números complejos.
- 10) (SA) Resuelve la ecuación $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ en los números complejos.
- 11) (SS) Sean α y β las dos raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - px + 1 = 0$ y, sean α' y β' , las dos raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - x + q = 0$. Expresa el producto $(\alpha' - \alpha)(\beta' - \beta)(\beta' - \alpha)(\alpha' - \beta)$ en función de p y q .
- 12) (SS) Si a y b son números reales distintos de cero, determina todas las soluciones en números complejos de la ecuación

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \frac{x^2 - a^2}{x^2 - b^2} = 0.$$

- 13) (SS) Resuelve la ecuación $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10 \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$ en los números reales.

2.6. Ecuaciones racionales con una incógnita

Una **ecuación racional** es una ecuación que contiene una o más expresiones racionales. Nos enfocaremos en resolver ecuaciones racionales con una incógnita, donde el grado de la incógnita es 1 o 2.

Durante la resolución de ecuaciones racionales, los métodos principales son los siguientes:

- 1) Descomposición en factores.
- 2) Introducción de nuevas variables (auxiliares).

Estrategia general para la resolución de una ecuación racional (2.6.1)

En cualquiera de los métodos descritos anteriormente, los pasos más comunes para resolver este tipo de ecuaciones son:

- 1) **Eliminar los denominadores.** Esto se logra cuando cada lado de la ecuación se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

- 2) **Agrupar términos.** Esto se logra cuando agrupamos a los términos que contienen la incógnita, de un lado de la ecuación, dejando al resto de los términos del otro lado de la ecuación. Cuando movemos un término de un lado de la ecuación al otro lado, su signo debe cambiarse. Todos los términos que no se movieron deben conservar sus signos.
- 3) **Simplificar.** Después de agrupar términos, se debe simplificar cada lado de la ecuación.

No es necesario realizar los pasos anteriores en el orden en que están listados. Dependiendo de cada ecuación, el orden en los pasos puede variar.

Resolución de una ecuación racional por el método de descomposición en factores

(2.6.2)

El método de descomposición en factores consiste en lo siguiente: Si la ecuación racional a resolver es $f(x) = 0$ y

$$f(x) = f_1(x)f_2(x) \cdots f_n(x),$$

donde $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ son expresiones racionales, entonces cualquier solución de la ecuación $f(x) = 0$ es solución del conjunto de ecuaciones

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad \dots, \quad f_n(x) = 0.$$

Sin embargo, no toda solución del conjunto de ecuaciones $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0$ es solución de la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplo 2.6.3

Resolver en los números reales, la ecuación $\frac{x^2 - 3x + 2}{x} \left(\frac{x + 2}{x^2 - 1} + 2 \right) = 0$.

Solución. La ecuación $\frac{x^2 - 3x + 2}{x} \left(\frac{x + 2}{x^2 - 1} + 2 \right) = 0$ se reduce al conjunto de ecuaciones:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x} = 0, \quad \frac{x + 2}{x^2 - 1} + 2 = 0.$$

Multiplicando por x la primera ecuación, obtenemos la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, esto es, $(x - 1)(x - 2) = 0$, de donde $x = 1$ o $x = 2$.

Multiplicando por $x^2 - 1$ la segunda ecuación, obtenemos que $x + 2 + 2(x^2 - 1) = 0$, esto es, $x(2x + 1) = 0$, de donde $x = 0$ o $x = -1/2$.

Sin embargo, con $x = 1$ no queda definida la expresión $\frac{x+2}{x^2-1}$ y con $x = 0$ no queda definida la expresión $\frac{x^2-3x+2}{x}$.

Por lo tanto, $x = 1$ y $x = 0$ no son soluciones de la ecuación inicial, por lo que las únicas soluciones son 2 y $-1/2$.

Obsérvese que el campo de definición de la ecuación inicial son aquellos números reales x donde los denominadores son distintos de cero. En este caso, son los números reales $x \neq 0$ y aquellos números reales x tales que $x^2 - 1 \neq 0$, esto es, $x \neq 0, 1, -1$. ■

Observación 2.6.4

En general, al resolver la ecuación racional $f(x) = 0$ por el método de descomposición en factores, de las soluciones halladas del conjunto de ecuaciones $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0$, las que satisfacen la ecuación $f(x) = 0$ son aquellos y solo aquellos valores de x que pertenecen al campo de definición de la ecuación $f(x) = 0$. El campo de definición de una ecuación racional, es el conjunto de aquellos números reales o complejos donde los denominadores que aparecen en la ecuación son distintos de cero. No es necesario determinar el campo de definición de una ecuación racional para poder resolverla. Una manera de verificar si un valor pertenece o no al campo de definición de la ecuación, es sustituir ese valor en la ecuación: si se cumple la igualdad, entonces dicho valor pertenece al campo de definición de la ecuación; en caso contrario, no pertenece al campo de definición de la ecuación.

Ejemplo 2.6.5

Resolver en los números reales, la ecuación

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{2} + 1.$$

Solución. Como ningún denominador contiene a la incógnita x , el campo de definición de la ecuación son todos los números reales. El mínimo común múltiplo de los denominadores es 10. Multiplicando ambos lados de la ecuación por 10, obtenemos la ecuación $6 = 5x + 10$, de donde $5x = -4$ y, por lo tanto, $x = -\frac{4}{5}$ es la única solución. ■

Ejemplo 2.6.6

Resolver en los números reales, la ecuación

$$\frac{x-3}{6} = 7 - \frac{x}{12}.$$

Solución. Nuevamente, como en el ejemplo anterior, el campo de definición de la ecuación son todos los números reales. El mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones es 12. Multiplicando ambos lados de la ecuación por 12, obtenemos la ecuación $2x - 6 = 84 - x$. Simplificando, obtenemos que $3x = 90$, de donde obtenemos que $x = \frac{90}{3} = 30$ es la única solución. ■

Ejemplo 2.6.7

Resolver en los números reales, la ecuación

$$\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} = \frac{5}{6}.$$

Solución. Como en los dos ejemplos anteriores, el campo de definición de la ecuación son todos los números reales. El mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones es 6. Multiplicando ambos lados de la ecuación por 6, obtenemos la ecuación $2x^2 + 3x = 5$, esto es, $2x^2 + 3x - 5 = 0$. Factorizando el lado izquierdo, resulta que $(2x + 5)(x - 1) = 0$, de donde obtenemos que $2x + 5 = 0$ o $x - 1 = 0$, esto es, $x = -\frac{5}{2}$ y $x = 1$. Como estos valores están en el campo de definición de la ecuación, concluimos que ambos son soluciones de la ecuación y son todas las soluciones. ■

Ejemplo 2.6.8

Resolver en los números reales, la ecuación

$$\frac{7}{x} - \frac{1}{3x} = \frac{8}{3}.$$

Solución. Observemos que el campo de definición de la ecuación son todos los números reales $x \neq 0$. El mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones es $3x$. Multiplicando ambos lados de la ecuación por $3x$, obtenemos la ecuación $21 - 1 = 8x$, esto es, $20 = 8x$, de donde obtenemos que $x = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$. Como este valor pertenece al campo de definición de la ecuación, concluimos que es la única solución de la ecuación. ■

Ejemplo 2.6.9

Resolver en los números reales, la ecuación

$$\frac{5x}{x-2} = 7 + \frac{10}{x-2}.$$

Solución. Observemos que el campo de definición de la ecuación son todos los números reales x tales que $x - 2 \neq 0$, esto es, son los números reales distintos de 2. El mínimo común múltiplo de los denominadores es $x - 2$. Multiplicando ambos lados de la ecuación por $x - 2$, obtenemos $5x = 7(x - 2) + 10$. Simplificando, obtenemos que $2x = 4$, de donde $x = 2$. Como este valor no pertenece al campo de definición de la ecuación, concluimos que la ecuación no tiene soluciones. ■

Ejemplo 2.6.10

Resolver en los números reales, la ecuación

$$1 - \frac{x - \frac{1+3x}{5}}{3} = \frac{x}{2} - \frac{2x - \frac{10-6x}{7}}{2}.$$

Solución. El campo de definición de la ecuación son todos los números reales, ya que ningún denominador contiene a la incógnita. Como la ecuación contiene fracciones complejas de ambos lados, es conveniente simplificar primero cada lado de la ecuación. Tenemos que

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x - \frac{1+3x}{5}}{3} &= 1 - \frac{5x - (1+3x)}{15} = \frac{15 - 2x + 1}{15} = \frac{16 - 2x}{15}, \\ \frac{x}{2} - \frac{2x - \frac{10-6x}{7}}{2} &= \frac{x}{2} - \frac{14x - (10-6x)}{14} = \frac{10 - 13x}{14}. \end{aligned}$$

Entonces, debemos resolver la ecuación

$$\frac{16 - 2x}{15} = \frac{10 - 13x}{14}.$$

Multiplicando cada lado de esta ecuación por el mínimo común múltiplo de 14 y 15, igual a $14 \cdot 15$, obtenemos que $14(16 - 2x) = 15(10 - 13x)$, esto es, $224 - 28x = 150 - 195x$. Agrupando y simplificando, obtenemos la ecuación $167x = -74$, de donde $x = -\frac{74}{167}$. Como este valor pertenece al campo de definición de la ecuación, concluimos que es la única solución de la ecuación original. ■

Ejemplo 2.6.11

Resolver en los números complejos, la ecuación

$$\frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 + 8x + 17} = \left(\frac{x - 3}{x + 4} \right)^2.$$

Solución. El campo de definición de la ecuación, son los números complejos x tales que $x + 4 \neq 0$ y $x^2 + 8x + 17 \neq 0$. Sin embargo, no determinaremos el campo de definición de la ecuación para resolverla.

Desarrollando el cuadrado, obtenemos que

$$\frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 + 8x + 17} = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 8x + 16}.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $(x^2 + 8x + 17)(x^2 + 8x + 16)$, resulta que

$$(x^2 - 6x + 10)(x^2 + 8x + 16) = (x^2 - 6x + 9)(x^2 + 8x + 17).$$

Desarrollando cada producto y simplificando, obtenemos que

$$x^4 + 2x^3 - 22x^2 - 16x + 160 = x^4 + 2x^3 - 22x^2 - 30x + 153.$$

Simplificando, obtenemos la ecuación $14x = -7$, de donde se sigue que $x = -\frac{1}{2}$. Para determinar si este valor pertenece al campo de definición de la ecuación, basta sustituirlo en la ecuación original y ver si se sostiene la igualdad. Sustituyendo $x = -\frac{1}{2}$ en lado izquierdo de la ecuación, obtenemos que

$$\frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 + 8x + 17} = \frac{\frac{1}{4} + 3 + 10}{\frac{1}{4} - 4 + 17} = \frac{\frac{1}{4} + 13}{\frac{1}{4} + 13} = 1.$$

Sustituyendo ahora $x = -\frac{1}{2}$ en el lado derecho de la ecuación, obtenemos que

$$\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^2 = \left(\frac{-\frac{1}{2}-3}{-\frac{1}{2}+4}\right)^2 = \left(\frac{-\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}}\right)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Como coincidieron los valores de cada lado de la igualdad, concluimos que $-\frac{1}{2}$ pertenece al campo de definición de la ecuación y, por lo tanto, es la única solución. ■

Solución alternativa. Haciendo los cambios de variable $a = x^2 - 6x$ y $b = x^2 + 8x$, obtenemos que

$$\frac{a+10}{b+17} = \frac{a+9}{b+16}.$$

Multiplicando ambos lados de esta última igualdad por el mínimo común múltiplo de los denominadores, igual a $(b+17)(b+16)$, obtenemos que

$$(a+10)(b+16) = (a+9)(b+17).$$

Desarrollando ambos productos y simplificando, obtenemos que $b - a = -7$. Sustituyendo los valores de a y b , resulta que $(x^2 + 8x) - (x^2 - 6x) = -7$. Simplificando esta ecuación, obtenemos la ecuación $14x = -7$, de donde $x = -\frac{1}{2}$, como habíamos obtenido en la primera solución. ■

Ejemplo 2.6.12

Resolver en los números reales, la ecuación

$$\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} = 3,$$

donde a , b y c son números reales positivos fijos.

Solución. El campo de definición de la ecuación son todos los números reales. Moviendo el $3 = 1 + 1 + 1$ al lado izquierdo de la ecuación, obtenemos que

$$\left(\frac{x-a-b}{c} - 1\right) + \left(\frac{x-b-c}{a} - 1\right) + \left(\frac{x-c-a}{b} - 1\right) = 0,$$

esto es,

$$\frac{x-a-b-c}{c} + \frac{x-a-b-c}{a} + \frac{x-a-b-c}{b} = 0.$$

Factorizando el lado izquierdo con el factor común $x - a - b - c$, obtenemos la ecuación

$$(x-a-b-c) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0.$$

Como a , b y c son números positivos, el factor $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ también es positivo, por lo que el factor $x - a - b - c$ debe ser igual a cero. Esto es, $x = a + b + c$ es la única solución de la ecuación original. ■

A continuación veremos cómo aplicar el método de introducción de nuevas variables.

Ejemplo 2.6.13

Resolver en los números complejos, la ecuación $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

Solución. Como no hay denominadores que contengan la incógnita, el campo de definición de esta ecuación, son todos los números complejos.

Si hacemos el cambio de variable $y = x^3$, obtenemos la ecuación $y^2 - 9y + 8 = 0$, esto es, $(y - 1)(y - 8) = 0$, de donde $y = 1$ o $y = 8$. A continuación, el problema se reduce a resolver el conjunto de ecuaciones $x^3 = 1$, $x^3 = 8$.

La primera ecuación es $x^3 - 1 = 0$, esto es, $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$. Aplicando ahora el método de descomposición en factores, tenemos que resolver el conjunto de ecuaciones $x - 1 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$. La primera ecuación tiene la única solución $x = 1$. Usando la fórmula general obtenemos que las soluciones de la segunda ecuación son $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2}$.

Ahora resolvemos la ecuación $x^3 - 8 = 0$, esto es, $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$ y obtenemos el conjunto de ecuaciones $x - 2 = 0$, $x^2 + 2x + 4 = 0$, cuyas soluciones son $x = 2$ y $x = -1 \pm \sqrt{-3}$, respectivamente.

Como todos los valores obtenidos están en el campo de definición de la ecuación inicial, concluimos que todos ellos son soluciones. ■

Ejemplo 2.6.14

Resolver la ecuación $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2 = 0$ en los números reales.

Solución. Tenemos que el campo de definición de la ecuación, son todos los números reales. Si hacemos el cambio de variable $y = x^2 + x + 4$, entonces la ecuación dada toma la forma $y^2 + 8xy + 15x^2 = 0$. Resolviendo esta ecuación como una ecuación cuadrática en la variable y , usando la fórmula general, obtenemos las soluciones

$$y = \frac{-8x \pm \sqrt{64x^2 - 60x^2}}{2} = -4x \pm x,$$

esto es, $y = -3x$ o $y = -5x$. Así pues, el problema se reduce a resolver el conjunto de ecuaciones $x^2 + x + 4 = -3x$, $x^2 + x + 4 = -5x$; esto es, $x^2 + 4x + 4 = 0$ y $x^2 + 6x + 4 = 0$. Resolviendo cada ecuación, obtenemos las soluciones $x = -2$, $x = -3 \pm \sqrt{5}$. Como todos estos valores están en el campo de definición de la ecuación, concluimos que todos son soluciones y son todas las soluciones. ■

Ejemplo 2.6.15

Resolver en los números complejos, la ecuación $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 27$.

Solución. Observemos que el campo de definición de la ecuación, son los números complejos $x \neq -3$. Como el lado izquierdo de la ecuación es una suma de cuadrados, esto sugiere sumar de ambos lados una expresión tal que el lado izquierdo se convierta en el cuadrado de un binomio. Así pues, sumando de ambos lados la expresión $-2x\frac{3x}{x+3}$, obtenemos que

$$\left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 = 27 - 6\frac{x^2}{x+3}.$$

Simplificando, obtenemos

$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 + 6\frac{x^2}{x+3} - 27 = 0.$$

Ahora, hacemos la sustitución $y = \frac{x^2}{x+3}$. Entonces, la ecuación anterior toma la forma $y^2 + 6y - 27 = 0$, esto es, $(y+9)(y-3) = 0$ y, de aquí, $y = -9$ o $y = 3$. El problema se ha reducido a resolver las ecuaciones

$$\frac{x^2}{x+3} = -9, \quad \frac{x^2}{x+3} = 3.$$

La primera ecuación es $x^2 + 9x + 27 = 0$, cuyas soluciones son $-\frac{9}{2} \pm \frac{3\sqrt{-3}}{2}$. La segunda ecuación es $x^2 - 3x - 9 = 0$ cuyas soluciones son $\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{5}}{2}$. Todos los valores obtenidos satisfacen la condición $x \neq -3$ y, por consiguiente, son todas las soluciones de la ecuación inicial. ■

Actividad de Aprendizaje 2.6.16

- 1) (S) Si se sabe que la solución de la ecuación $3a - x = \frac{x}{2} + 3$ es 4, determina el valor de $(-a)^2 - 2a$.
- 2) Resuelve las siguientes ecuaciones en los números reales.
 - a) (S) $\frac{2x-7}{10} - \frac{3x+1}{5} = \frac{6-x}{5}$.
 - b) (S) $\frac{12}{x+5} + \frac{5}{x} = \frac{20}{x}$.
 - c) (S) $x+1 = \frac{72}{x}$.
 - d) (S) $\frac{4}{x(x-1)} + \frac{3}{x} = \frac{4}{x-1}$.
 - e) (S) $\frac{2x}{5} = \frac{x^2-5x}{5x}$.
 - f) (SA) $\frac{5}{x^2-2x-8} - \frac{1}{x^2+9x+20} = \frac{4}{x^2+3x-10}$.
 - g) (SA) $\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$.
 - h) (SA) $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} (x-1) \right) - 1 \right) - 1 \right) - 1 = 0$.
 - i) (SS) $\frac{(x+2)(x-4)}{7(x+3)(x-5)} - \frac{(x+4)(x-7)}{12(x+5)(x-8)} = \frac{5}{84}$.
 - j) (SS) $\frac{x-b}{a} - \frac{x-a}{b} = \frac{a}{b}$, donde a y b son números reales distintos de cero.

- 3) (SA) Si se sabe que las ecuaciones en x ,

$$3 \left(x - 2 \left(x + \frac{a}{3} \right) \right) = 2x \quad \text{y} \quad \frac{3x+a}{3} - \frac{1+4x}{6} = 0$$

tienen una solución en común, determina tal solución común.

- 4) (SS) Resuelve en los números reales, la ecuación

$$\frac{2ax}{ab+a+1} + \frac{2bx}{bc+b+1} + \frac{2cx}{ca+c+1} = 1,$$

donde a , b y c son números reales positivos cuyo producto es igual a 1.

Actividad de Aprendizaje 2.6.16 (Continuación)

5) Resuelve las siguientes ecuaciones en los números complejos.

a) (S) $\frac{x+2}{x+1} + \frac{2-x}{1-x} + \frac{4}{x-1} = 0.$

b) (S) $\frac{6}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = 2 - \frac{x+4}{x-1}.$

c) (S) $\frac{(3-x)^3 + (4+x)^3}{(3-x)^2 + (4+x)^2} = 7.$

d) (S) $x^4 - 1 = 0.$

e) (SA) $(x-1)^3 + (2x+3)^3 = 27x^3 + 8.$

f) (SA) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0.$

g) (SA) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-2)(x-3) = 1.$

h) (SS) $x^3 + x - 2 = 0.$

i) (SS) $\frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1.$

j) (SS) $3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) + 4 = 0.$

2.7. Resolución de problemas y planteamiento de ecuaciones

Para resolver un problema mediante el planteamiento de una ecuación, necesitaremos expresar por medio de símbolos algebraicos lo que dice el problema. Por ejemplo, si queremos expresar por medio de símbolos algebraicos la frase “el doble de un número más uno”, primero le asignamos una incógnita al número, por ejemplo x . Luego, el doble del número es $2x$ y el doble del número más uno es $2x + 1$. Veamos otros ejemplos.

Ejemplo 2.7.1

Expresar, por medio de una expresión algebraica, la frase “la fracción cuyo numerador es igual a 4 veces el denominador menos tres unidades”.

Solución. Si le llamamos x al valor del denominador, entonces el numerador será $4x - 3$ y la fracción es $\frac{4x-3}{x}$. ■

Ejemplo 2.7.2

Expresar, por medio de una expresión algebraica, la frase “dos números cuya diferencia sea 10”.

Solución. Si x es el número menor, entonces el mayor será $x + 10$. ■

Ejemplo 2.7.3

Expresar, por medio de una expresión algebraica, la frase “los cuadrados de tres enteros consecutivos”.

Solución. Si x es el menor de los tres enteros consecutivos, entonces los otros dos son $x + 1$ y $x + 2$. Luego, sus cuadrados son x^2 , $(x + 1)^2$ y $(x + 2)^2$. ■

Ejemplo 2.7.4

Expresar, por medio de una expresión algebraica, la frase “cinco menos que el doble de la diferencia entre un número y siete”.

Solución. Si x denota al número desconocido, entonces el doble de la diferencia entre el número desconocido y siete lo podemos expresar como $2(x - 7)$, por lo que cinco menos que este doble es $2(x - 7) - 5 = 2x - 14 - 5 = 2x - 19$. ■

A continuación veremos algunos ejemplos de problemas cuya solución la haremos mediante el planteamiento de una ecuación.

Ejemplo 2.7.5

Hallar dos números sabiendo que su suma es igual a 21 y que uno de ellos es igual al doble del otro.

Solución. Denotemos con x a uno de los números. Como el doble de x es $2x$, el otro número es $2x$. Luego, tenemos que $x + 2x = 21$, de donde $3x = 21$. Por lo tanto, $x = 7$ y $2x = 14$. ■

Ejemplo 2.7.6

Hallar dos números sabiendo que su suma es 37 y que si se divide el mayor por el menor, el cociente es 3 y el residuo es 5.

Solución. Si denotamos por x al número menor, entonces el mayor es $37 - x$ (ya que ambos números suman 37). Entonces, tenemos que

$$\frac{37 - x}{x} = 3 + \frac{5}{x}.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos que $37 - x = 3x + 5$, de donde $4x = 32$. Por lo tanto, $x = 8$. De esta manera, los números buscados son 8 y $37 - 8 = 29$. ■

Ejemplo 2.7.7

Un obrero puede realizar un trabajo en 3 días y otro obrero puede realizar el mismo trabajo en 6 días. Hallar el tiempo que tardarán en realizar el trabajo ambos obreros trabajando juntos.

Solución. Sea x el número de días que tardarán trabajando juntos los dos obreros. En un día, el primer obrero realiza $\frac{1}{3}$ del trabajo y el segundo obrero realiza $\frac{1}{6}$ del mismo. Trabajando juntos realizarán $\frac{1}{x}$ del trabajo en un día. Por lo tanto, tenemos la ecuación

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos que $x = 2$ días. ■

Ejemplo 2.7.8

Hallar un número entero de dos dígitos sabiendo que la suma de estos es 12 y que si se invierten, el número resultante es $\frac{4}{7}$ del número original.

Solución. Sea x el dígito de las unidades. El dígito de las decenas es $12 - x$. Así que el número original es $x + 10(12 - x)$. Si intercambiamos los dígitos, el número resultante es $(12 - x) + 10x$. Por lo tanto, tenemos la ecuación

$$(12 - x) + 10x = \frac{4}{7}(x + 10(12 - x)).$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos que $x = 4$ y $12 - x = 8$. Luego, el número buscado es 84. ■

Ejemplo 2.7.9

¿Qué día del año marcará la hoja de un calendario cuando el número de hojas arrancadas exceda en 2 a los $\frac{3}{8}$ del número de hojas no arrancadas? (Considera que el año tiene 365 días).

Solución. Sea x el número de hojas arrancadas. Entonces, el número de hojas no arrancadas es igual a $365 - x$. Luego, tenemos que

$$x = \frac{3}{8}(365 - x) + 2,$$

de donde, $8x = 1095 - 3x + 16$. Por lo tanto, $11x = 1111$ esto es, $x = 101$. Esto significa que se arrancaron 101 hojas del calendario, de las cuales 31 corresponden al mes de enero, 28 corresponden al mes de febrero y 31 corresponden al mes de marzo, haciendo un total de 90 días. El resto corresponde al mes de abril, que son $101 - 90 = 11$ días, que es el número de hojas arrancadas en el mes de abril. Por lo tanto, el día que marcará el calendario será el 12 de abril. ■

Ejemplo 2.7.10

En cierto instante, un reloj marca 2 minutos menos de lo debido, aunque va adelantado. Si marcase 3 minutos menos de lo que debe marcar, pero se adelantara al día en $\frac{1}{2}$ minuto más de lo que se adelanta, entonces marcaría la hora exacta un día antes que lo marca. ¿En cuántos minutos al día se adelanta este reloj?

Solución. Supongamos que el reloj se adelanta x minutos al día. Entonces, él marcará el tiempo exacto a los $\frac{2}{x}$ días. Si el reloj marcase 3 minutos menos, pero se adelantara en $x + \frac{1}{2}$ minutos al día, entonces marcaría la hora exacta a los $\frac{3}{x + \frac{1}{2}}$ días. Por consiguiente,

$$\frac{3}{x + \frac{1}{2}} + 1 = \frac{2}{x},$$

de donde obtenemos que $x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$, esto es, $2x^2 + 3x - 2 = 0$. De acuerdo con el Ejemplo 1.9.9, tenemos que $2x^2 + 3x - 2 = 2(x + 2)(x - \frac{1}{2})$. Entonces, los valores posibles de x son -2 y $\frac{1}{2}$. Como x no puede ser negativo, la única opción es $x = \frac{1}{2}$, lo que significa que el reloj se adelanta medio minuto al día. ■

Actividad de Aprendizaje 2.7.11

- 1) (S) Expresa, por medio de una expresión algebraica, cada uno de los siguientes enunciados y luego simplifica la expresión.
 - a) La suma de un tercio de un número y cuatro quintos del mismo número.
 - b) Cinco veces el producto de ocho y un número.
 - c) La suma de cinco veces un número y doce, sumado al producto de quince y el número.
 - d) Cuatro menos el doble de la suma de un número y once.
 - e) Un número aumentado por dos tercios del número.
- 2) (S) La suma de dos números es 15. Utilizando x para representar el mayor de los dos números, expresa la frase "la suma de dos veces el número menor y dos más que el número mayor" en una expresión algebraica y simplifica la expresión.
- 3) (S) ¿Cuál de los siguientes enunciados se traduce en la expresión $8n^3 - 5$?
 - a) La diferencia entre cinco y el producto de ocho y el cubo de un número.
 - b) Cinco restado del cubo de ocho y un número.
 - c) Cinco menos que el producto de ocho y el cubo de un número.
- 4) (S) Determina un número sabiendo que su mitad es igual a su sexta parte más 10.
- 5) (S) Si la diferencia de dos números es 6 y la mitad del mayor excede en 10 a los $\frac{3}{8}$ del menor, determina los números.
- 6) (S) Cuando el recíproco del triple de un número se resta de 7, el resultado es el recíproco del doble del número. Determina de qué número se trata.
- 7) (S) Cuando un número se suma al numerador y al denominador de la fracción $\frac{7}{9}$, la fracción resultante es $\frac{5}{6}$. Determina el número que se sumó.
- 8) (S) Del dinero que tenía en mi cuenta bancaria retiré $\frac{1}{7}$; ingresé después $\frac{2}{15}$ de lo que quedó y aún faltaban \$120.00 para tener la cantidad inicial. ¿Cuánto dinero tenía en mi cuenta?
- 9) (S) Determina dos enteros consecutivos tales que la diferencia de sus cuadrados exceda en 43 a $\frac{1}{11}$ del número menor.

- 10) (S) El dígito de las decenas de un número de dos dígitos, excede en 3 al dígito de las unidades y, si el número se divide por la suma de sus dígitos, el cociente es 7. Determina el número.
- 11) (S) Un padre tiene 24 años más que su hijo. Determina sus edades actuales sabiendo que dentro de 8 años la edad del padre será el doble que la del hijo.
- 12) (S) Un barril está lleno de agua. Luego, se vacía a la mitad y después se añade un litro de agua. Después de repetir esta operación (vaciar la mitad de lo que hay y añadir un litro) 5 veces seguidas, quedan 3 litros de agua en el barril. ¿Cuántos litros de agua había inicialmente en el barril?
- 13) (S) En un puesto de frutas había cierto número de mangos. Un cliente compró $\frac{1}{3}$ de los mangos que había más 4 mangos. Otro cliente compró $\frac{1}{3}$ de los que quedaban y 6 más. Un tercer cliente compró la mitad de los que quedaban y 9 más y se acabaron los mangos. ¿Cuántos mangos había en el puesto?
- 14) (SA) Una llave de agua tarda el doble que otra llave en llenar de agua un depósito. Si entre las dos llaves tardan 30 minutos en llenarlo, ¿cuánto tiempo tarda cada llave en llenar el depósito? (Piensa qué proporción del depósito llena cada una de las llaves en un minuto).
- 15) (SA) Halla un número de dos dígitos sabiendo que la suma de ellos es igual a 10 y que si se invierten, el número que resulta es una unidad menor que el número original.
- 16) (SA) ¿A qué hora, entre las 5 y las 6, las manecillas de un reloj forman un ángulo recto
 - a) antes de que el minutero pase sobre el horario?
 - b) después de que el minutero ha pasado sobre el horario?
- 17) (SA) Una persona compró un cierto número de chicles a 180 pesos. Al día siguiente, le hubieran dado 60 chicles más por el mismo dinero, con lo cual hubiera resultado un peso menos más barato cada chicle. ¿Cuántos chicles compró?
- 18) (SA) Un número de seis dígitos empieza por la izquierda con el dígito 1. Si se pasa este dígito del primer lugar al último sin alterar el orden de los demás dígitos, se obtiene un nuevo número tres veces mayor que el inicial. Determina el número inicial.

Actividad de Aprendizaje 2.7.11 (Continuación)

- 19) (SS) Se tienen cuatro pipas de agua y una piscina. La primera y la segunda pipa trabajando juntas llenan la piscina en 2 horas. La segunda y la tercera pipa trabajando juntas la llenan en 3 horas. La tercera y la cuarta pipa trabajando juntas la llenan en 4 horas. ¿Cuánto tiempo tardan en llenar la piscina la primera y la cuarta pipa trabajando juntas?
- 20) (SS) Al centro de un huerto hay un naranjal, pero para llegar a él hay que pasar por 3 puertas, en cada una de las cuales hay un vigilante. Los vigilantes te permiten pasar a cortar las naranjas que quieras, pero todos te ponen la misma condición: “Al salir de aquí deberás darme la mitad de las naranjas que traigas más la mitad de otra sin partirla”. Tú debes salir con exactamente una naranja. ¿Cuántas naranjas debes cortar?
- 21) (SS) Al multiplicar dos números enteros, uno de los cuales es mayor que el otro en 10 unidades, Carlitos cometió un error disminuyendo en 4 el dígito de las decenas en el producto. Al dividir (para corroborar el resultado) el producto obtenido por el menor de los factores, Carlitos obtuvo en el cociente 39 y en el residuo 22. Determina los factores.

2.8. Ecuaciones irracionales

Una **ecuación irracional** es una ecuación donde la incógnita está bajo el signo de un radical o bajo el signo de una potencia fraccionaria. Las soluciones de tales ecuaciones se consideran sobre el campo de los números reales.

Métodos de resolución de una ecuación irracional (2.8.1)

Al resolver una ecuación irracional, se hace uso de dos métodos fundamentales.

- 1) Elevar ambos miembros de la ecuación a una misma potencia, completar cuadrados o factorizar.
- 2) Sustitución de variables o expresiones es una herramienta poderosa para eliminar radicales y, por sustitución, el grado de la ecuación puede ser reducido al mismo tiempo.

Al elevar ambos miembros de una ecuación a una misma potencia, hay que tener en cuenta que si n es un entero impar, las ecuaciones $f(x) = g(x)$

y $(f(x))^n = (g(x))^n$ tienen las mismas soluciones; pero, si n es un entero par, al pasar de la ecuación $f(x) = g(x)$ a la ecuación $(f(x))^n = (g(x))^n$, pueden surgir raíces extrañas. Por ejemplo, la ecuación $x - 1 = 3$ tiene una raíz $x = 4$, mientras que la ecuación $(x - 1)^2 = 3^2$ tiene dos raíces, $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$, una de las cuales ($x = -2$) es extraña para la ecuación $x - 1 = 3$. Por esta y otras razones, al resolver ecuaciones irracionales, en la mayoría de los casos, es necesario la comprobación de las soluciones halladas.

Ejemplo 2.8.2

Resolver la ecuación $\sqrt{2x+5} = 8 - \sqrt{x-1}$.

Solución. Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación, obtenemos $2x + 5 = (8 - \sqrt{x-1})^2$, esto es, $16\sqrt{x-1} = 58 - x$. Elevando nuevamente al cuadrado, obtenemos que $256(x-1) = (58-x)^2$, esto es, $x^2 - 372x + 3620 = 0$. Factorizando obtenemos que $(x-10)(x-362) = 0$, de donde $x = 10$ o $x = 362$.

Verifiquemos la solución $x = 10$. Sustituyendo en la ecuación inicial, tenemos que $\sqrt{2x+5} = \sqrt{2(10)+5} = 5$ y $8 - \sqrt{x-1} = 8 - \sqrt{10-1} = 8 - 3 = 5$. Esto significa que $x = 10$ es raíz de la ecuación.

Verifiquemos la solución $x = 362$. Sustituyendo en el lado izquierdo de la ecuación, tenemos que $\sqrt{2x+5} = \sqrt{2(362)+5} = 27$. Sustituyendo en el lado derecho de la ecuación, tenemos que $8 - \sqrt{x-1} = 8 - \sqrt{362-1} = 8 - 19 = -11$. Esto significa que $x = 362$ es una solución extraña de la ecuación.

Por lo tanto, la ecuación solo tiene la raíz $x = 10$. ■

Ejemplo 2.8.3

Resolver la ecuación $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{x-5}$.

Solución. Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación, obtenemos la ecuación

$$x - 1 + 2\sqrt{(x-1)(2-x)} + 2 - x = x - 5.$$

Simplificando esta ecuación, obtenemos que $2\sqrt{(x-1)(2-x)} = x - 6$. Elevando al cuadrado esta última ecuación, obtenemos la ecuación

$$4(x-1)(2-x) = (x-6)^2.$$

Desarrollando y simplificando, obtenemos la ecuación $x^2 - 24x + 44 = 0$, esto es, $(x - 2)(x - 22) = 0$, cuyas soluciones son $x = 2$ y $x = 22$.

Verificación: Si $x = 2$, el lado derecho de la ecuación inicial es $\sqrt{-3}$, mientras que el lado izquierdo es $\sqrt{1} = 1$. Esto indica que $x = 2$ no es solución de la ecuación. Sustituyendo ahora $x = 22$ en la ecuación inicial, el lado izquierdo es $\sqrt{21} + \sqrt{-20}$, mientras que el lado derecho es $\sqrt{17}$, por lo que $x = 22$ tampoco es solución de la ecuación.

Por lo tanto, la ecuación inicial no tiene soluciones. ■

Ejemplo 2.8.4

Resolver la ecuación $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x+5} = \sqrt{3x}$.

Solución. Tenemos la ecuación $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} = \sqrt{3x} + \sqrt{2x+5}$. Elevando ambos lados al cuadrado, obtenemos

$$2x+3+2\sqrt{(2x+3)(3x+2)}+3x+2=3x+2\sqrt{3x(2x+5)}+2x+5.$$

Simplificando, obtenemos que $\sqrt{(2x+3)(3x+2)} = \sqrt{3x(2x+5)}$, esto es,

$$\sqrt{6x^2+13x+6} = \sqrt{6x^2+15x}.$$

Elevando al cuadrado nuevamente, obtenemos que $6x^2+13x+6 = 6x^2+15x$, de donde se sigue que $x = 3$.

Verificación: Sustituyendo el valor $x = 3$ en el lado izquierdo de la ecuación, obtenemos $\sqrt{9} + \sqrt{11} - \sqrt{11} = \sqrt{9}$, lo que coincide con el lado derecho.

Por lo tanto, $x = 3$ es la única solución de la ecuación inicial. ■

Ejemplo 2.8.5

Resolver la ecuación $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{2x-6} = 2$.

Solución. Escribamos la ecuación como $\sqrt[3]{2x-6} = \sqrt{x-1} - 2$. Elevando al cubo ambos lados de esta ecuación, obtenemos que

$$2x-6 = (x+1)\sqrt{x+1} - 6(x+1) + 12\sqrt{x+1} - 8.$$

Simplificando, obtenemos la ecuación $(x+13)\sqrt{x+1} = 8(x+1)$. Elevando al cuadrado ambos lados, obtenemos que $(x+13)^2(x+1) = 64(x+1)^2$, esto es,

$$(x+1)((x+13)^2 - 64(x+1)) = 0.$$

Si $x + 1 = 0$, obtenemos la raíz $x = -1$.

Si $(x + 13)^2 - 64(x + 1) = x^2 - 38x + 105 = (x - 3)(x - 35) = 0$, obtenemos las raíces $x = 3$ y $x = 35$.

Verificación: Sustituyendo cada valor encontrado en la ecuación inicial, nos cercioramos que todos ellos son sus raíces. ■

Solución alternativa. Resolveremos la ecuación mediante el método de sustitución de variables. Si hacemos $u = \sqrt{x+1}$ y $v = \sqrt[3]{2x-6}$, obtenemos la ecuación $u - v = 2$. Con el fin de hallar los valores de las nuevas variables u y v , es insuficiente tener una sola ecuación. Elevando al cuadrado la primera ecuación y elevando al cubo la segunda, obtenemos que $u^2 = x + 1$ y $v^3 = 2x - 6$, lo cual implica que $2u^2 - v^3 = 8$. De esta forma, tenemos dos ecuaciones en las nuevas variables u y v , donde no aparece la incógnita x . Despejando u de la ecuación $u - v = 2$ y sustituyendo en la ecuación $2u^2 - v^3 = 8$, obtenemos la ecuación $2(v + 2)^2 - v^3 = 8$, esto es, $v^3 - 2v^2 - 8v = 0$. Factorizando el lado izquierdo, obtenemos que $v(v^2 - 2v - 8) = v(v - 4)(v + 2) = 0$, de donde $v = 0, 4$ o -2 . Ahora analizamos cada valor de v .

Si $v = 0$, entonces $u = 2$, esto es, $\sqrt{x+1} = 2$, lo cual implica que $x + 1 = 4$ y, por lo tanto, $x = 3$.

Si $v = 4$, entonces $u = 6$, esto es, $\sqrt{x+1} = 6$, lo cual implica que $x + 1 = 36$ y, por lo tanto, $x = 35$.

Si $v = -2$, entonces $u = 0$, esto es, $\sqrt{x+1} = 0$, lo cual implica que $x + 1 = 0$ y, por lo tanto, $x = -1$. ■

Ejemplo 2.8.6

Resolver la ecuación

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + 28^2} + x}{x}} - \sqrt{x\sqrt{x^2 + 28^2} - x^2} = 3.$$

Solución. Haciendo $u = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + 28^2} + x}{x}}$ y $v = \sqrt{x\sqrt{x^2 + 28^2} - x^2}$, tenemos que $u - v = 3$ y

$$\begin{aligned} uv &= \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + 28^2} + x}{x}} \sqrt{x\sqrt{x^2 + 28^2} - x^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + 28^2} + x}{x} \cdot x(\sqrt{x^2 + 28^2} - x)} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x^2 + 28^2})^2 - x^2} = 28. \end{aligned}$$

Sustituyendo $u = v + 3$ en la ecuación $uv = 28$, obtenemos que $v^2 + 3v - 28 = 0$, esto es, $(v + 7)(v - 4) = 0$, de donde $v = -7$ o 4 . Como v no puede ser negativo, la única opción es $v = 4$ y, por consiguiente, $u = v + 3 = 7$. Luego, tenemos las

ecuaciones $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}} = 7$ y $\sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2} = 4$.

Elevando al cuadrado la segunda ecuación, obtenemos que

$$x\sqrt{x^2+28^2}-x^2=16. \quad (2.2)$$

Elevando otra vez al cuadrado, obtenemos la ecuación $x^2(x^2+28^2)=(x^2+16)^2$. Desarrollando los productos y simplificando, resulta que $752x^2-256=0$, de donde obtenemos las soluciones $x=\pm\frac{4\sqrt{47}}{47}$.

Resolvamos ahora la primera ecuación. Elevando al cuadrado y simplificando, obtenemos que $\sqrt{x^2+28^2}=48x$. Elevando nuevamente al cuadrado, resulta que $x^2+28^2=48^2x^2$, esto es, $(48^2-1)x^2=28^2$. De aquí que $x^2=\frac{28^2}{(48-1)(48+1)}=\frac{28^2}{47(49)}$ y, por lo tanto, $x=\pm\frac{28}{7\sqrt{47}}=\pm\frac{4}{\sqrt{47}}=\pm\frac{4\sqrt{47}}{47}$, que son las mismas soluciones que obtuvimos de la segunda ecuación.

Verificación: Es claro que $x=-\frac{4\sqrt{47}}{47}$ no es solución de la ecuación (2.2), ya que $x\sqrt{x^2+28^2}<0$ mientras que $16+x^2>0$, por lo que tampoco es solución de la ecuación $\sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2}=4$.

Se deja de ejercicio verificar que el valor $x=\frac{4\sqrt{47}}{47}$ es solución de ambas ecuaciones $\sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2}=4$ y $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}}=7$.

Así pues, $\frac{4\sqrt{47}}{47}$ es la única solución de la ecuación inicial. ■

Ejemplo 2.8.7

Resolver la ecuación $\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2$.

Solución. Elevando al cubo, utilizando la fórmula $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$, obtenemos la ecuación

$$(72-x)-(16-x)-3\sqrt[3]{72-x}\sqrt[3]{16-x}(\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x})=8. \quad (2.3)$$

Sustituyendo $\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2$ en la ecuación (2.3), resulta que

$$72-x-16+x-3\sqrt[3]{72-x}\sqrt[3]{16-x}(2)=8. \quad (2.4)$$

Simplificando, tenemos que $8=\sqrt[3]{(72-x)(16-x)}=\sqrt[3]{(x^2-88x+1152)}$. Elevando otra vez al cubo y simplificando, obtenemos que $x^2-88x+640=0$, esto es, $(x-80)(x-8)=0$, de donde $x=80$ o $x=8$.

Se deja de ejercicio verificar que ambos resultados son soluciones de la ecuación inicial. ■

Observación 2.8.8

Ya que en la solución del Ejemplo 2.8.7, elevamos al cubo ambos lados de la ecuación y, como sabemos, elevar a una potencia impar no viola la equivalencia de las ecuaciones, podríamos pensar que las soluciones halladas no tienen que ser verificadas. Sin embargo, esto no es así. Al pasar de la ecuación (2.3) a la ecuación (2.4), sustituimos la expresión $\sqrt[3]{72-x} - \sqrt[3]{16-x}$ por 2, por lo que toda raíz de la ecuación (2.3) es raíz de la ecuación (2.4), mientras que lo inverso, por regla, no es cierto. Por lo tanto, la comprobación de las soluciones obtenidas es necesaria.

Ejemplo 2.8.9

Resolver la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}} + \frac{1}{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}} = \frac{3}{4}.$$

Solución. Racionalizando los denominadores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}}{(5+x) - (5-x)} + \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}{(5+x) - (5-x)} &= \frac{3}{4}, \\ \frac{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}}{2x} + \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}{2x} &= \frac{3}{4}, \\ \frac{2\sqrt{5+x}}{2x} &= \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

esto es, $4\sqrt{5+x} = 3x$. Elevando al cuadrado, obtenemos $16(5+x) = 9x^2$, esto es, $9x^2 - 16x - 80 = 0$. Factorizando, resulta que $(9x+20)(x-4) = 0$, de donde $x = 4$ o $x = -\frac{20}{9}$.

Se deja de ejercicio verificar que el valor $x = 4$ es solución de la ecuación dada, pero que $x = -\frac{20}{9}$ no es solución. ■

En el siguiente ejemplo, el método de resolución de la ecuación requiere de un artificio.

Ejemplo 2.8.10

Resolver la ecuación $\sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x$.

Solución. Multipliquemos ambos lados de la ecuación por la expresión

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5}.$$

El lado izquierdo, después de multiplicar, es

$$(2x^2 + 3x + 5) - (2x^2 - 3x + 5) = 6x,$$

por lo que obtenemos la ecuación $6x = 3x(\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5})$, esto es, $x(\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5} - 2) = 0$, de donde se sigue que $x = 0$ o

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 2. \quad (2.5)$$

Sumando la ecuación inicial y la ecuación (2.5), obtenemos la ecuación

$$2\sqrt{2x^2 + 3x + 5} = 3x + 2.$$

Elevando al cuadrado esta ecuación, resulta que $8x^2 + 12x + 20 = 9x^2 + 12x + 4$, que se simplifica a $x^2 = 16$, por lo que $x = \pm 4$.

Verificación: Sustituyendo cada uno de los valores encontrados, 0, 4 y -4 en la ecuación inicial, nos cercioramos de que solo $x = 4$ satisface a la ecuación, por lo que es la única raíz. ■

Actividad de Aprendizaje 2.8.11

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) (S) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$.

2) (S) $\sqrt{x+10} - \frac{6}{\sqrt{x+10}} = 5$.

3) (S) $\sqrt[4]{x^2 - 144} = \sqrt{x-8} + \sqrt{8-x}$.

4) (S) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} = \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4}$.

5) (S) $1 + \sqrt{2x+7} = x - 3$.

6) (S) $\sqrt{5x+5} - \sqrt{3-3x} - 2\sqrt{x} = 0$.

7) (S) $\sqrt{2x} + \sqrt{6x^2+1} = x+1$.

8) (S) $\sqrt{7} + \sqrt[3]{x^2+7} = 3$.

9) (S) $\frac{x-2}{\sqrt{2x-7}} = \sqrt{x-4}$.

Actividad de Aprendizaje 2.8.11 (Continuación)

- 10) (SA) $\sqrt{x}\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{x}\sqrt{x} = 56$.
- 11) (SA) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$.
- 12) (SA) $\sqrt[3]{x+24} + \sqrt{12-x} = 6$.
- 13) (SA) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$.
- 14) (SA) $\frac{3}{1-\sqrt{x-2}} + \frac{3}{1+\sqrt{x-2}} = 6$.
- 15) (SA) $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$.
- 16) (SA) $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$.
- 17) (SA) $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}} = 2$.
- 18) (SA) $\frac{1}{\sqrt{x}+a} + \frac{1}{\sqrt{x}+b} = \frac{1}{\sqrt{x}-a} + \frac{1}{\sqrt{x}-b}$, donde a y b son números reales.
- 19) (SS) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x-1$.
- 20) (SS) $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}} - \sqrt{x\sqrt{x^2+66^2}-x^2} = 5$.
- 21) (SS) $\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2-x^2}$, donde a denota un número real.
- 22) (SS) $\sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{1-x^2}$, donde m denota un entero positivo mayor que 1.
- 23) (SS) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$.
- 24) (SS) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.
- 25) (SS) $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2}$.

CAPÍTULO 3

NÚMEROS COMPLEJOS

Recordemos que al elevar un número real al cuadrado, sea negativo o positivo, el resultado es positivo. Entonces, ¿cómo resolver ecuaciones como $x^2 = -1$? Es claro que x no es un número real. Para resolver este tipo de ecuaciones, tenemos al conjunto de los números complejos.

El nombre de “números complejos” no se debe a su dificultad para utilizarlos o a su propia estructura, sino más bien a su forma no tradicional de realizar operaciones aritméticas en comparación con los números reales. El desarrollo de la teoría de los números complejos se atribuye a varios personajes, destacando figuras como Tartaglia, Gerolamo Cardano y Rafael Bombelli en sus orígenes alrededor del siglo XVI. Posteriormente, en el siglo XIX, grandes mentes como Descartes, Euler, Gauss y Cauchy, contribuyeron al desarrollo de los números complejos desde una perspectiva más moderna.

Los números complejos surgieron de manera formal cuando Gerolamo Cardano revisó la resolución de ecuaciones cúbicas hacia el año 1545. La innovación de estos números radica en que no siguen las reglas comunes de suma, resta, multiplicación y división de los números reales. Los números complejos tienen una descripción geométrica propia, por lo que permite considerarlos como un sistema de números ampliado incluyendo a los números reales como caso particular.

La introducción de los números complejos permitió dar consistencia y solución a varios planteamientos matemáticos que permanecían insolubles. Asimismo, tienen aplicaciones en diversas áreas de las ciencias exactas e ingenierías. Son indispensables en la electrónica, el cálculo estructural, en los fundamentos de mecánica cuántica y, especialmente, en varios campos de la misma matemática, como el análisis de Fourier, las ecuaciones diferenciales ordinarias, las ecuaciones diferenciales parciales, la teoría de matrices, la teoría de grupos, entre otros.

Un **número complejo** es una pareja de números reales (x, y) . Por ejemplo, $(-5, 6)$ y $(1, -2)$ son dos números complejos. Si $z = (x, y)$, decimos que x es **la parte real** de z , la cual se denota por $x = \text{Re}(z)$ y, decimos que y es **la parte imaginaria** de z , la cual se denota por $y = \text{Im}(z)$. Dos números complejos (x, y) y (v, w) son iguales si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria, esto es, $(x, y) = (v, w)$ si $x = v$ y $y = w$. Al conjunto de los números complejos se denota con la letra $\mathbb{C}$.

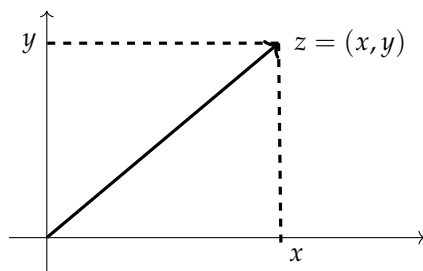


Figura 3.1: El número complejo $z = (x, y)$ se identifica con el vector determinado por los puntos $(0, 0)$ y (x, y) .

3.1. Suma y resta de números complejos

Suma y resta de números complejos (3.1.1)

Si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ son números complejos, su **suma** $z_1 + z_2$ se define como

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

donde $x_1 + x_2$ y $y_1 + y_2$ denotan la suma usual en los números reales.

Si $z = (x, y)$ es un número complejo, el **inverso aditivo** de z es el número complejo $-z = (-x, -y)$, el cual satisface que $z + (-z) = (0, 0) = (-z) + z$. La **resta** $z_1 - z_2$ se define como la suma de z_1 y el inverso aditivo de z_2 , esto es,

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

La suma de números complejos tiene una interpretación geométrica como suma de vectores.

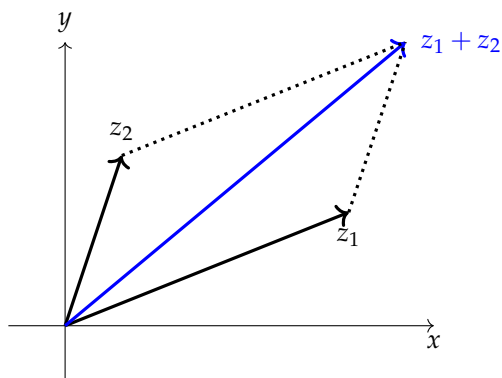


Figura 3.2: La suma de números complejos representada geoméricamente por medio de la ley del paralelogramo.

Ejemplo 3.1.2

Si $z_1 = (-5, 6)$ y $z_2 = (1, -2)$, entonces

$$z_1 + z_2 = (-5, 6) + (1, -2) = (-5 + 1, 6 - 2) = (-4, 4),$$

$$z_2 + z_1 = (1, -2) + (-5, 6) = (1 - 5, -2 + 6) = (-4, 4),$$

$$z_1 - z_2 = (-5, 6) - (1, -2) = (-5, 6) + (-1, 2) = (-5 - 1, 6 + 2) = (-6, 8),$$

$$z_2 - z_1 = (1, -2) - (-5, 6) = (1, -2) + (5, -6) = (1 + 5, -2 - 6) = (6, -8).$$

Ejemplo 3.1.3 Propiedad conmutativa de la suma de números complejos

Si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, entonces

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = z_2 + z_1,$$

lo que significa que la suma de números complejos es una operación conmutativa. Observa que $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ y $y_1 + y_2 = y_2 + y_1$ por la conmutatividad de la suma en los números reales.

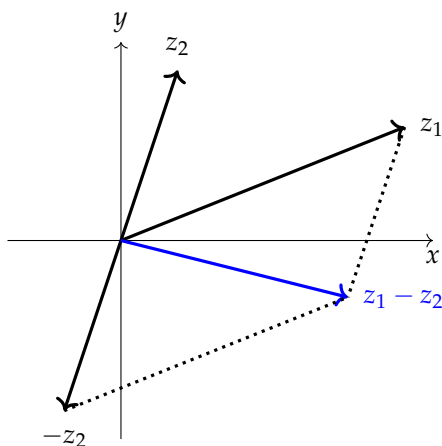


Figura 3.3: La resta de números complejos representada geométricamente por medio de la ley del paralelogramo.

Ejemplo 3.1.4

Determinar todos los números complejos z tales que $z + (-5, 7) = (2, -1)$.

Solución. Primero escribamos al número complejo z como una pareja de números reales, esto es, $z = (x, y)$. Entonces, tenemos la ecuación $(x, y) + (-5, 7) = (2, -1)$. Realizando la suma del lado izquierdo, obtenemos que $(x - 5, y + 7) = (2, -1)$. Ahora, aplicamos la definición de igualdad de números complejos, obteniendo las ecuaciones $x - 5 = 2$, $y + 7 = -1$. Resolviendo cada ecuación, obtenemos que $x = 7$ y $y = -8$. Por lo tanto, la respuesta es $z = (7, -8)$. ■

Neutro aditivo (3.1.5)

Observemos que si z es cualquier número complejo, entonces

$$z + (0, 0) = z = (0, 0) + z.$$

El número complejo $(0, 0)$ se llama **neutro aditivo** y se denota por 0 . Observemos también que para cada número complejo z , la única solución de la ecuación $z + \omega = z$ es $\omega = 0$, por lo que el número complejo 0 es el único neutro aditivo.

Ejemplo 3.1.6

Determinar todos los números complejos z tales que $z + (1, \sqrt{2}) = 0$.

Solución. Si $z = (x, y)$, tenemos que $(x, y) + (1, \sqrt{2}) = (0, 0)$. Haciendo la suma del lado izquierdo, resulta que $(1 + x, \sqrt{2} + y) = (0, 0)$. Igualando las partes reales, tenemos que $1 + x = 0$, de donde $x = -1$. Igualando ahora las partes imaginarias, tenemos que $\sqrt{2} + y = 0$, de donde $y = -\sqrt{2}$. Luego, el número $z = (-1, -\sqrt{2})$ es la única solución de la ecuación. En particular, esto muestra que z es el inverso aditivo del número $(1, \sqrt{2})$. ■

Observación 3.1.7

La suma de números complejos satisface las siguientes propiedades:

- 1) Propiedad conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ para cualesquiera números complejos z_1 y z_2 .
- 2) Propiedad asociativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ para cualesquiera números complejos z_1, z_2 y z_3 .
- 3) El número complejo $(0, 0)$, denotado por 0 , es el único neutro aditivo.
- 4) Cada número complejo tiene un único inverso aditivo, esto es, para cada número complejo z hay un único número complejo w tal que $z + w = w + z = 0$. Denotamos $w = -z$.

Actividad de Aprendizaje 3.1.8

- 1) (S) En un mismo plano, ubica a cada uno de los siguientes números complejos: $(-1, -1)$, $(3, -2)$ y $(-4, \frac{1}{2})$.
- 2) (S) Realiza las siguientes operaciones:
 - a) $(1, 5) + (7, 2)$.
 - b) $(6, 9) - (1, 5)$.
 - c) $(9, 8) - (3, 1) + (9, 4)$.
 - d) $(a + 1, b) + (2a - b, -a) - (5a, 4b)$, donde a y b son números reales.
- 3) (S) Para cada número complejo z , da una interpretación geométrica del inverso aditivo de z .
- 4) (S) Determina los números complejos z tales que $z + (-1, 3) = (5, 8) - z$.

Actividad de Aprendizaje 3.1.8 (Continuación)

- 5) (S) Determina los números complejos z tales que

$$z - \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = z + z + z + z + z.$$

- 6) (S) Si n es un entero positivo, definimos $nz = \underbrace{z + z + \cdots + z}_n$ para cualquier número complejo z . Determina una expresión para nz en términos de $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ y n .
- 7) (S) Determina todos los inversos aditivos de los números complejos: $(1, -\sqrt{2})$, $(-2, \frac{3}{2})$, $(0, y)$ donde y es cualquier número real.
- 8) (SA) Sean $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ y $z_3 = (x_3, y_3)$. Determina $(z_1 + z_2) + z_3$ y $z_1 + (z_2 + z_3)$. ¿Qué puedes concluir?
- 9) (SA) Si z es cualquier número complejo, determina el inverso aditivo del número complejo $-z$.
- 10) (SS) Si $z = (x, y)$ es un número complejo, definimos el número $\bar{z} = (x, -y)$. Determina todos los números complejos z tales que $z = \bar{z}$.

3.2. Multiplicación de números complejos

En la sección anterior definimos la suma de números complejos componente a componente. En esta sección definiremos el producto de números complejos. Contrario a la suma, la definición del producto de dos números complejos no es componente a componente como veremos a continuación.

Multiplicación de números complejos (3.2.1)

Si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ son números complejos, su **multiplicación** $z_1 z_2$ se define como

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

donde $x_1 x_2$, $y_1 y_2$, $x_1 y_2$ y $x_2 y_1$ denotan la multiplicación usual de números reales.

Ejemplo 3.2.2

Si $z_1 = (-5, 6)$ y $z_2 = (1, -2)$, entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (-5, 6)(1, -2) = (-5(1) - 6(-2), -5(-2) + 1(6)) = (7, 16), \\ z_2 z_1 &= (1, -2)(-5, 6) = (1(-5) - (-2)(6), 1(6) + (-5)(-2)) = (7, 16). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.3 Propiedad conmutativa del producto de números complejos

Si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, entonces

$$\begin{aligned} z_2 z_1 &= (x_2, y_2)(x_1, y_1) = (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1 + x_1 y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = z_1 z_2, \end{aligned}$$

lo que significa que la multiplicación de números complejos es una operación conmutativa. Observa que $x_2 x_1 = x_1 x_2$ y $y_2 y_1 = y_1 y_2$ por la conmutatividad de la multiplicación en los números reales y, que $x_2 y_1 + x_1 y_2 = x_1 y_2 + x_2 y_1$, por la conmutatividad de la suma en los números reales.

Ejemplo 3.2.4

Determinar todos los números complejos z tales que $z(2, 3) = (4, 5)$.

Solución. Primero escribamos al número complejo z como una pareja de números reales, esto es, $z = (x, y)$. Entonces, tenemos la ecuación $(x, y)(2, 3) = (4, 5)$. Realizando la multiplicación del lado izquierdo de esta ecuación, obtenemos que $(2x - 3y, 3x + 2y) = (4, 5)$. Ahora, aplicamos la definición de igualdad de números complejos, obteniendo el sistema de ecuaciones $2x - 3y = 4$, $3x + 2y = 5$. Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos la solución $x = \frac{23}{13}$, $y = -\frac{2}{13}$. Por lo tanto, la única solución es $z = (\frac{23}{13}, -\frac{2}{13})$. ■

Forma algebraica de un número complejo

(3.2.5)

Observemos que si z es cualquier número complejo, entonces

$$z(1, 0) = z = (1, 0)z.$$

Al número complejo $(1, 0)$ se le llama **identidad multiplicativa**.

Observemos también que para cada número complejo z , la única solución de la ecuación $z\omega = z$ es $\omega = (1, 0)$, por lo que el número complejo $(1, 0)$ es la única identidad multiplicativa.

Por otro lado, es fácil ver que $(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$. Si a cada número complejo de la forma $(x, 0)$ lo identificamos con el número real x , entonces $(0, 1)^2$ se identifica con el -1 y, en general, identificamos al número complejo

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$$

con $x + (0, 1)y$.

El número $(0, 1)$ se llama **unidad imaginaria** y se denota por i . Por lo tanto, tenemos que $(x, y) = x + iy$ donde $i^2 = -1$. Otra forma de indicar que $i^2 = -1$ es $i = \sqrt{-1}$. La expresión $x + iy$ se llama **forma algebraica** del número complejo (x, y) .

Usando la forma algebraica de un número complejo, podemos calcular la suma y la multiplicación de dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Si z es un número complejo distinto de cero, se dice que ω es un **inverso multiplicativo** de z si se cumple que $z\omega = 1 = \omega z$, donde 1 denota a la identidad multiplicativa.

Ejemplo 3.2.6

Determinar todos los inversos multiplicativos del número i .

Solución. Debemos determinar todas las soluciones complejas de la ecuación $iz = 1$. Haciendo $z = x + iy$, tenemos la ecuación $i(x + iy) = 1$, esto es, $ix - y = 1$. Igualando las partes reales, obtenemos que $-y = 1$ e, igualando las partes imaginarias, obtenemos que $x = 0$. Por lo tanto, $y = -1$ y $x = 0$, de donde la única solución de la ecuación en cuestión es $z = -i$. Finalmente, es fácil cerciorarse que $zi = -i(i) = -i^2 = -(-1) = 1$. Por lo tanto, el (único) inverso multiplicativo del número complejo i es $-i$. ■

Ejemplo 3.2.7

Determinar todos los inversos multiplicativos del número $1 + i$.

Solución. El problema se traduce en resolver la ecuación $(1 + i)z = 1$. Haciendo $z = x + iy$, tenemos la ecuación $(1 + i)(x + iy) = 1$. Desarrollando y simplificando, obtenemos que $x - y + i(x + y) = 1$. Igualando las partes reales, obtenemos que $x - y = 1$ e, igualando las partes imaginarias, obtenemos que $x + y = 0$. Sumando estas dos ecuaciones, obtenemos que $2x = 1$, de donde $x = \frac{1}{2}$. Sustituyendo este valor en la ecuación $x + y = 0$, resulta que $y = -\frac{1}{2}$. Luego, la única solución de la ecuación en cuestión es $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. Por último, es fácil cerciorarse que

$$z(1 + i) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(1 + i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i^2 = 1.$$

Por lo tanto, el (único) inverso multiplicativo del número $1 + i$ es $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. ■

En la Sección 3.2.1, veremos una forma más eficiente para determinar los inversos multiplicativos.

Ejemplo 3.2.8

Determinar todos los números complejos z tales que $z^2 = i$.

Solución. Si $z = x + iy$, entonces $z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 - y^2 + i(2xy)$. El problema se traduce en determinar los números reales x, y tales que $x^2 - y^2 + i(2xy) = i$. Igualando las partes reales, obtenemos que $x^2 - y^2 = 0$ e, igualando las partes imaginarias, obtenemos que $2xy = 1$. La primera ecuación la podemos escribir como $(x - y)(x + y) = 0$, de donde se sigue que $x = y$ o $x = -y$.

- Si $x = y$, la segunda ecuación es $2x^2 = 1$ y, por lo tanto, $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

- Si $x = -y$, la segunda ecuación es $-2x^2 = 1$, esto es, $x^2 = -\frac{1}{2}$, lo cual es imposible.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $z^2 = i$ son $\pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}} \right)$. ■

Ejemplo 3.2.9

Determinar todos los números complejos z tales que $z^2 = 21 - 20i$.

Solución. Sea $z = x + iy$. Tenemos que $(x + iy)^2 = 21 - 20i$, esto es, $x^2 - y^2 + 2xyi = 21 - 20i$. Igualando las partes reales de ambos lados, obtenemos que $x^2 - y^2 = 21$ e, igualando las partes imaginarias, obtenemos que $2xy = -20$. Resolviendo esta última ecuación para y , obtenemos que $y = -\frac{10}{x}$. Sustituyendo esto en la ecuación $x^2 - y^2 = 21$, resulta que

$$x^2 - \frac{100}{x^2} = 21.$$

Multiplicando esta ecuación por x^2 , obtenemos la ecuación $x^4 - 21x^2 - 100 = 0$. Haciendo $t = x^2$, resulta la ecuación cuadrática $t^2 - 21t - 100 = 0$, cuyas soluciones son 25 y -4 . Como x es un número real y $t = x^2$, no es posible que t sea -4 . Por lo tanto, $t = x^2 = 25$, de donde se sigue que $x = \pm 5$.

- Si $x = 5$, entonces $y = -\frac{10}{x} = -2$ y $z = 5 - 2i$.
- Si $x = -5$, entonces $y = -\frac{10}{x} = 2$ y $z = -5 + 2i$.

Luego, las soluciones de la ecuación $z^2 = 21 - 20i$ son $\pm(5 - 2i)$. ■

Observación 3.2.10

En los Ejemplos 3.2.8 y 3.2.9 podríamos haber comenzado tomando la raíz cuadrada de ambos lados de cada ecuación, obteniendo $z = \pm\sqrt{i}$ y $z = \pm\sqrt{21 - 20i}$, respectivamente. Pero, ¿qué significa $\sqrt{i}$ y $\sqrt{21 - 20i}$? Recordemos que la función de variable real $f(x) = \sqrt{x}$ está definida para $x \geq 0$; si $x \geq 0$, entonces $\sqrt{x}$ es el número real no negativo cuyo cuadrado es igual a x . Desafortunadamente, esto no nos ayuda a definir la raíz cuadrada de un número no real. En lugar de tratar de definir $\sqrt{i}$ y $\sqrt{21 - 20i}$, pensemos en aquellos números complejos cuyo cuadrado es i y en aquellos cuyo cuadrado es $21 - 20i$.

Después de haber encontrado a los dos números complejos cuyos cuadra-

dos son iguales a $21 - 20i$, podemos ver la dificultad que hay en tratar de definir $\sqrt{21 - 20i}$. ¿Cuál de los números $5 - 2i$ o $-5 + 2i$ deberíamos tomar como la raíz cuadrada? Simplemente no podemos llamar a una raíz “positiva” y a la otra “negativa”. Debido a estas dificultades, trataremos de evitar usar expresiones como $\sqrt{21 - 20i}$ y, en lugar de eso, pensaremos en aquellos “números cuyo cuadrado es $21 - 20i$ ”. Podemos referirnos a estos números como las “raíces cuadradas” de $21 - 20i$ y, más aún, podemos referirnos a una u otra como “una raíz cuadrada” de $21 - 20i$. Sin embargo, en general no podremos escoger una o la otra igual a $\sqrt{21 - 20i}$, como lo hacemos con $\sqrt{25} = 5$.

La fórmula general (2.1) que usamos para resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, es válida para cualesquiera números a , b y c reales o complejos. A continuación veremos un ejemplo donde los coeficientes son números complejos.

Ejemplo 3.2.11

Determinar las raíces de la ecuación $x^2 - (11 - 2i)x + 23 - 11i = 0$.

Solución. Aplicando la fórmula (2.1) con $a = 1$, $b = -(11 - 2i)$ y $c = 23 - 11i$, obtenemos que

$$\begin{aligned} x &= \frac{(11 - 2i) \pm \sqrt{(11 - 2i)^2 - 4(1)(23 - 11i)}}{2} = \frac{11 - 2i \pm \sqrt{117 - 44i - 92 + 44i}}{2} \\ &= \frac{11 - 2i \pm 5}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las raíces son $\frac{11-2i+5}{2} = 8 - i$ y $\frac{11-2i-5}{2} = 3 - i$. ■

Ejemplo 3.2.12

Determinar todos los números z tales que $z^2 + 81 = 0$.

Solución. Despejando z^2 , tenemos que $z^2 = -81$. Como el cuadrado de z es un número negativo, z no puede ser un número real. Es fácil ver que las soluciones son $z = \pm 9i$, ya que $i^2 = -1$ y $9^2 = (-9)^2 = 81$.

Otra forma es “tomar la raíz cuadrada” de cada lado de la ecuación $z^2 = -81$,

obteniendo que $z = \pm\sqrt{-81}$, donde $\sqrt{-81}$ es una abreviación para $i\sqrt{81}$, por lo que $z = \pm i\sqrt{81} = \pm 9i$.

Observación 3.2.13

Debemos ser cuidadosos al usar la notación como en $\sqrt{-81}$. La función $f(x) = \sqrt{x}$ solo está definida para $x \geq 0$. Así que cuando escribimos $\sqrt{-81}$ como un paso intermedio para resolver una ecuación como $z^2 = -81$, debemos tener en cuenta que lo que queremos decir es $i\sqrt{81}$.

Las fórmulas de Vieta (2.5.8) que relacionan a los coeficientes de una ecuación cuadrática con sus raíces, son válidas aún cuando los coeficientes o las raíces de la ecuación cuadrática no son números reales.

Ejemplo 3.2.14

Determinar números reales a y b si se sabe que $a + 2i$ y $b - 5i$ son las raíces de la ecuación $x^2 + (-4 + 3i)x + (13 + i) = 0$.

Solución. Según las fórmulas de Vieta (2.5.8), la suma de las raíces de la ecuación cuadrática es igual a $-(-4 + 3i) = 4 - 3i$, por lo que tenemos la ecuación

$$4 - 3i = (a + 2i) + (b - 5i) = (a + b) - 3i. \quad (3.1)$$

De acuerdo con las fórmulas de Vieta (2.5.8), el producto de las raíces de la ecuación cuadrática es igual a $13 + i$, por lo que tenemos la ecuación

$$13 + i = (a + 2i)(b - 5i) = ab - 5ai + 2bi - 10i^2 = (ab + 10) + i(-5a + 2b). \quad (3.2)$$

Igualando las partes reales de la ecuación (3.1), obtenemos que $a + b = 4$. Igualando las partes imaginarias de la ecuación (3.2), obtenemos que $-5a + 2b = 1$. Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que $a = 1$ y $b = 3$.

Observación 3.2.15

En la Sección 2.5 vimos que cuando los coeficientes de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, son números reales y el discriminante es un número negativo, entonces la ecuación tiene dos solu-

ciones complejas no reales (ver (2.5.4)). Podemos decir más en este caso. En efecto, si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un número complejo de la forma $i\sqrt{r}$ donde r es un número real positivo. Entonces, las raíces de la ecuación son

$$\frac{-b + i\sqrt{r}}{2a} \quad \text{y} \quad \frac{-b - i\sqrt{r}}{2a}.$$

Ejemplo 3.2.16

Determinar una ecuación cuadrática con coeficientes reales y término cuadrático x^2 , que tenga como raíz a $3 + 2i$.

Solución. Como la raíz $3 + 2i$ no es un número real y los coeficientes de la ecuación son números reales, la otra raíz debe ser $3 - 2i$ según la Observación 3.2.15. Luego, las raíces de la ecuación son $3 + 2i$ y $3 - 2i$.

Para determinar la ecuación cuadrática, observemos que la suma de las raíces es $3 + 2i + 3 - 2i = 6$ y su producto es $(3 + 2i)(3 - 2i) = 9 + 4 = 13$. Aplicando las fórmulas de Vieta (2.5.8), la ecuación cuadrática buscada es $x^2 - 6x + 13 = 0$. ■

Potencias enteras no negativas de números complejos (3.2.17)

Si z es un número complejo distinto de cero, tenemos las siguientes definiciones:

- 1) $z^0 = 1$.
- 2) $z^n = zz^{n-1}$, donde n es cualquier entero mayor que 0.

A partir de estas definiciones, las siguientes **leyes de exponentes** se satisfacen para cualesquiera números complejos distintos de cero z , z_1 , z_2 y para cualesquiera números enteros positivos m y n .

- 1) $z^m z^n = z^{m+n}$.
- 2) $(z^m)^n = z^{mn}$.
- 3) $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$.

Ejemplo 3.2.18

$$\begin{aligned}i^3 &= i(i^2) = i(-1) = -i, \\i^4 &= i(i^3) = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.19

Calculemos i^8 de dos formas distintas. Usando la ley de exponentes 1) y el Ejemplo 3.2.18, tenemos que

$$i^8 = i^2(i^6) = -i^6 = -(i^3)(i^3) = -(-i)(-i) = -i^2 = -(-1) = 1.$$

Usando ahora la ley de exponentes 2), tenemos que $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$.

Observación 3.2.20

La multiplicación de números complejos satisface las siguientes propiedades:

- 1) Propiedad conmutativa: $z_1 z_2 = z_2 z_1$ para cualesquiera números complejos z_1 y z_2 .
- 2) Propiedad asociativa: $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$ para cualesquiera números complejos z_1, z_2 y z_3 .
- 3) El número complejo $(1, 0)$, denotado por 1 , es la única identidad multiplicativa.
- 4) Cada número complejo distinto de cero tiene un único inverso multiplicativo, esto es, para cada número complejo $z \neq 0$, hay un único número complejo z' tal que $zz' = z'z = 1$ y se denota por $z' = z^{-1}$.
- 5) Propiedad distributiva: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ para cualesquiera números complejos z_1, z_2 y z_3 .

Actividad de Aprendizaje 3.2.21

- 1) (S) Sean $z_1 = (1, 2)$, $z_2 = (-2, 3)$ y $z_3 = (1, -1)$. Determina
 - a) $z_1 + z_2 + z_3$.
 - b) $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$.
 - c) $z_1 z_2 z_3$.
 - d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.
- 2) (S) Sean $\omega = 5 - 3i$, $\alpha = -1 + 4i$, $\beta = 2 - i$ y $z = 1 + 2i$. Escribe en forma algebraica los siguientes números:
 - a) $\alpha + \beta + z$.
 - b) $\alpha \beta z$.
 - c) $\omega z - 2\omega - z$.
 - d) $\omega^2 + 2\omega z + z^2$.
 - e) $2\omega^2 z + 3\omega z^2$.
- 3) (S) Determina la parte real y la parte imaginaria del número complejo z tal que $(2 + 3i)z = -4 - 19i$.
- 4) (S) Determina números reales x, y tales que $(1 - 2i)x + (1 + 2i)y = 1 + i$.
- 5) (S) Determina todos los inversos multiplicativos de los siguientes números complejos:
 - a) $1 + 2i$
 - b) $3 + 4i$
 - c) $2 - i$
 - d) $1 - \sqrt{2}i$.
- 6) (S) Determina todos los números z tales que $4z^2 + 12 = 0$.
- 7) (S) Determina las raíces de la ecuación $z^2 - (3 - 8i)z - (14 + 12i) = 0$.
- 8) (S) Si una raíz de una ecuación cuadrática con coeficientes números reales es $6 + i\sqrt{5}$, determina la otra raíz.
- 9) (S) Sean r y s números reales. Si la ecuación $2x^2 + rx + s = 0$ tiene como raíz a $3 + 2i$, determina el valor de s .
- 10) (S) En el Ejemplo 3.2.11 vimos que $8 - i$ y $3 - i$ son las raíces de la ecuación $x^2 - (11 - 2i)x + 23 - 11i = 0$. Sin embargo, $8 - i$ y $3 - i$ no son conjugados entre sí. Explica por qué esto no contradice la Observación 3.2.15.
- 11) (S) Usando las leyes de los exponentes, sin desarrollar las potencias, determina el producto $(1 + i)^4(2 - 2i)^3$ en forma algebraica.

Actividad de Aprendizaje 3.2.21 (Continuación)

- 12) (SA) Si $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ y $z_3 = x_3 + iy_3$ son cualesquiera números complejos, determina $(z_1 z_2) z_3$ y $z_1 (z_2 z_3)$. ¿Qué puedes concluir?
- 13) (SA) Si $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ y $z_3 = x_3 + iy_3$ son cualesquiera números complejos, determina $z_1 (z_2 + z_3)$ y $z_1 z_2 + z_1 z_3$. ¿Qué puedes concluir?
- 14) (SA) Determina todos los números complejos z tales que $z^2 = -5 + 12i$.
- 15) (SA) Determina todos los números complejos z tales que $z^2 + z + 1 = 0$.
- 16) (SS) Determina todos los números complejos z tales que $z^3 - 1 = 0$.
- 17) (SS) Determina el valor de la suma $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \cdots + 32i^{32}$.
- 18) (SS) El objetivo de este ejercicio es generalizar las ideas de los Ejemplos 3.2.8 y 3.2.9. Para cada número complejo $a + ib$, queremos determinar los números complejos z tales que $z^2 = a + ib$.
Escribiendo $z = x + iy$, tenemos la ecuación $(x + iy)^2 = a + ib$, esto es, $x^2 - y^2 + i(2xy) = a + ib$. Igualando las partes reales y las partes imaginarias, obtenemos el sistema de ecuaciones $x^2 - y^2 = a$ y $2xy = b$.
- a) Verifica que x^2 y $-y^2$ son soluciones de la ecuación cuadrática

$$t^2 - at - \frac{b^2}{4} = 0.$$

- b) Haciendo $c^2 = a^2 + b^2$, con $c > 0$, verifica que $x^2 = \frac{1}{2}(c + a)$ y que $y^2 = \frac{1}{2}(c - a)$.
- c) Si $b > 0$, verifica que $(x, y) = (\pm\sqrt{(c+a)/2}, \pm\sqrt{(c-a)/2})$.
- d) Si $b < 0$, verifica que $(x, y) = (\pm\sqrt{(c+a)/2}, \mp\sqrt{(c-a)/2})$.
- e) Si $b = 0$, verifica que $c = |a|$ y, $x = 0$ o $y = 0$, dependiendo si $a < 0$ o $a > 0$.
- f) Usando los incisos anteriores, resuelve la ecuación $z^2 = -7 - 24i$.
- 19) (SS) Determina dónde está el error en la siguiente secuencia de igualdades: $-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

3.3. División de números complejos

En la sección anterior vimos que si z es un número complejo distinto de cero, el número ω que satisface la igualdad $z\omega = 1$, es llamado inverso multiplicativo de z . Observemos que $\omega = \frac{1}{z}$.

Una manera de calcular $\frac{1}{z}$, es planteando un sistema de ecuaciones como vimos en los Ejemplos 3.2.6 y 3.2.7. En general, si $z = x + iy$ con $x \neq 0$ o $y \neq 0$, $\frac{1}{z} = x' + iy'$, entonces $(x + iy)(x' + iy') = 1$, esto es,

$$(xx' - yy') + i(yx' + xy') = 1 + i0.$$

Igualando las partes reales e igualando las partes imaginarias de los números de cada lado de la igualdad, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} xx' - yy' &= 1, \\ yx' + xy' &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones con respecto a x' y y' , obtenemos que

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Observemos que $x^2 + y^2 \neq 0$ ya que $x \neq 0$ o $y \neq 0$.

Por lo tanto,

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (3.3)$$

Ejemplo 3.3.1

Aplicando la fórmula (3.3), tenemos que

$$\frac{1}{i} = \frac{0}{0^2 + 1^2} - i\frac{1}{0^2 + 1^2} = -i.$$

Ejemplo 3.3.2

Aplicando la fórmula (3.3), tenemos que

$$\frac{1}{1 + 2i} = \frac{1}{1^2 + 2^2} - i\frac{2}{1^2 + 2^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

División de números complejos (3.3.3)

Si z y z' son números complejos con $z \neq 0$, la **división** $\frac{z'}{z}$ se define como el producto de z' y $\frac{1}{z}$, esto es,

$$\frac{z'}{z} = z' \cdot \frac{1}{z}.$$

Por lo tanto, si $z = x + iy$ y $z' = x_1 + iy_1$, aplicando la fórmula (3.3) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{z'}{z} &= z' \cdot \frac{1}{z} = (x_1 + iy_1) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{x_1 x + y_1 y}{x^2 + y^2} + i \frac{y_1 x - x_1 y}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ejemplo 3.3.4

Aplicando la fórmula (3.4), obtenemos que

$$\frac{1+2i}{3+4i} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{3^2 + 4^2} + i \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{3^2 + 4^2} = \frac{3+8}{9+16} + i \frac{6-4}{9+16} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i.$$

Ejemplo 3.3.5

Determinar la forma algebraica del número complejo $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2$.

Solución. Primero vamos a determinar la forma algebraica del número que se encuentra dentro del paréntesis. Aplicando la fórmula (3.4), tenemos que

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1-1}{1^2 + (-1)^2} + i \frac{1 - (-1)}{1^2 + (-1)^2} = \frac{2}{2}i = i.$$

Por lo tanto, $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2 = i^2 = -1.$ ■

Potencias enteras de números complejos

(3.3.6)

Si z es un número complejo distinto de cero, tenemos las siguientes definiciones:

$$1) z^{-1} = \frac{1}{z}.$$

$$2) z^n = (z^{-1})^{-n}, \text{ donde } n \text{ es cualquier entero menor que cero.}$$

Las siguientes **leyes de exponentes** se satisfacen para cualesquiera números complejos distintos de cero z, z_1, z_2 y para cualesquiera números enteros m y n .

$$1) z^m z^n = z^{m+n}.$$

$$2) \frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}.$$

$$3) (z^m)^n = z^{mn}.$$

$$4) (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n.$$

$$5) \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n}.$$

Ejemplo 3.3.7

$$a) i^{-1} = \frac{1}{i} = -i, \text{ donde la segunda igualdad se sigue por el Ejemplo 3.3.1.}$$

$$b) i^{-3} = (i^{-1})^3 = (-i)^3 = -i^3 = -(-i) = i, \text{ donde la penúltima igualdad se sigue por el Ejemplo 3.2.18.}$$

Ejemplo 3.3.8

Escribir en forma algebraica el número complejo $(1 + \sqrt{2}i)^{-9}(1 - \sqrt{2}i)^{-10}$.

Solución. Aplicando la ley de exponentes 1), observamos que

$$(1 - \sqrt{2}i)^{-10} = (1 - \sqrt{2}i)^{-9}(1 - \sqrt{2}i)^{-1}.$$

Entonces, por la ley asociativa de la multiplicación de números complejos, obtenemos que

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{2}i)^{-9}(1 - \sqrt{2}i)^{-10} &= (1 + \sqrt{2}i)^{-9}[(1 - \sqrt{2}i)^{-9}(1 - \sqrt{2}i)^{-1}] \\ &= [(1 + \sqrt{2}i)^{-9}(1 - \sqrt{2}i)^{-9}](1 - \sqrt{2}i)^{-1}.\end{aligned}$$

Aplicando ahora la ley de exponentes 4), el producto dentro de los corchetes lo podemos calcular como sigue:

$$(1 + \sqrt{2}i)^{-9}(1 - \sqrt{2}i)^{-9} = [(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i)]^{-9} = (1 - 2i^2)^{-9} = 3^{-9}.$$

Finalmente, aplicando la fórmula (3.3), obtenemos que

$$(1 - \sqrt{2}i)^{-1} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}i} = \frac{1}{1 + 2} - i \frac{\sqrt{2}}{1 + 2} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i.$$

Por lo tanto, $(1 + \sqrt{2}i)^{-9}(1 - \sqrt{2}i)^{-10} = 3^{-9} \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i \right) = \frac{1}{3^{10}} + \frac{\sqrt{2}}{3^{10}}i.$ ■

Ejemplo 3.3.9

Determinar los números complejos z tales que $\frac{2z - 3i}{z + 4} = -5 + i.$

Solución. Comenzamos multiplicando ambos lados de la ecuación por el denominador del lado izquierdo, lo que nos da $2z - 3i = (-5 + i)(z + 4).$ Desarrollando el producto del lado derecho, obtenemos $2z - 3i = -5z - 20 + iz + 4i.$ Agrupando ahora del lado izquierdo a todos los términos que contienen a z y agrupando del lado derecho a los términos que no contienen a z , obtenemos que $7z - iz = -20 + 7i.$ Usando ahora la ley distributiva podemos factorizar z del lado izquierdo, lo que nos da $z(7 - i) = -20 + 7i,$ de donde se sigue que $z = \frac{-20 + 7i}{7 - i}.$ Por último, usando la fórmula (3.4), obtenemos que

$$z = \frac{-20(7) + 7(-1)}{7^2 + (-1)^2} + i \frac{7(7) - (-20)(-1)}{7^2 + (-1)^2} = -\frac{147}{50} + \frac{29}{50}i.$$

■

Actividad de Aprendizaje 3.3.10

1) (S) Sean $z_1 = (1, 2)$, $z_2 = (-2, 3)$ y $z_3 = (1, -1)$. Determina, en forma algebraica, los números complejos

a) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$.

b) $\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$.

2) (S) Determina la forma algebraica de los siguientes números complejos.

a) $\frac{1}{i} + \frac{i}{2-i}$.

b) $i^{-3} + i^5$.

c) $(-1 + i\sqrt{3})^2(1 - i\sqrt{3})^{-2}$.

d) $(i - i^{-1})^{-1}$.

3) (S) Resuelve las siguientes ecuaciones en los números complejos:

a) $(2 + i)z + (-3 + 4i) = 0$.

b) $\frac{1+2i}{3z} = 4 + 5i$.

c) $3z + \frac{z}{1+i} = 10 - 4i$.

4) (S) Escribe en forma algebraica el número $\frac{1}{1 + \frac{1}{1+i}}$.

5) (SA) Si $\omega = 2 + 3i$ y $z = 4 - 5i$, determina $\frac{\omega^3 + 2\omega^2z + \omega z^2}{\omega^2z + \omega z^2}$ en forma algebraica.

6) (SA) Realiza las operaciones indicadas escribiendo tu respuesta en forma algebraica.

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8.$$

7) (SA) Determina números reales x, y tales que $\frac{x-3}{3+i} + \frac{y-3}{3-i} = i$.

8) (SA) Si $f(x) = \frac{x^6 + x^4}{x+1}$, determina lo siguiente:

a) $f(i)$

b) $f(-i)$

c) $f(i-1)$

Actividad de Aprendizaje 3.3.10 (Continuación)

9) (SS) Simplifica $\frac{(1-i)^{100}}{(1+i)^{99}}$.

10) (SS) Si z es cualquier número complejo, determina $(z^{-1})^{-1}$ sin usar las leyes de los exponentes.

3.4. Conjugado de un número complejo

Conjugado de un número complejo (3.4.1)

Para un número complejo $z = x + iy$, el número complejo $\bar{z} = x - iy$ es llamado **conjugado** de z . Geométricamente, el conjugado de z es la reflexión de z con respecto al eje x .

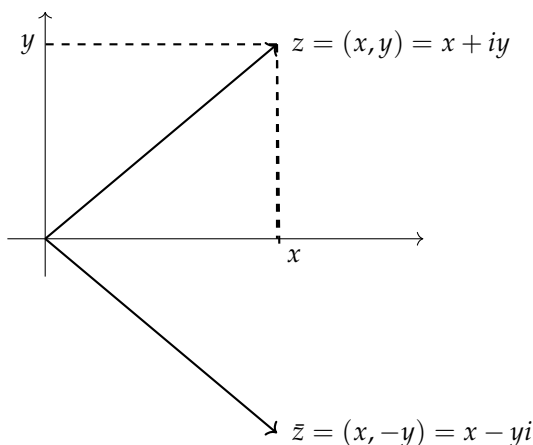


Figura 3.4: El conjugado de $z = (x, y)$ es la reflexión de z con respecto al eje x .

Ejemplo 3.4.2

$$\overline{2 - 3i} = 2 + 3i; \overline{i} = -i.$$

Ejemplo 3.4.3 Conjugado de una suma de dos números complejos

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = \overline{z_1 + z_2}.$$

Ejemplo 3.4.4 Doble conjugado

Si $z = x + iy$, entonces $\overline{z} = x - iy$ y $\overline{\overline{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$.

Ejemplo 3.4.5 Conjugado del producto de número real por número complejo

Si $z = x + iy$ es un número complejo y r es un número real, entonces

$$\overline{rz} = \overline{r(x + iy)} = \overline{rx + iry} = rx - iry = r(x - iy) = r\overline{z}.$$

A continuación veremos un ejemplo donde aplicaremos los resultados de los Ejemplos 3.4.3, 3.4.4 y 3.4.5.

Ejemplo 3.4.6

Resolver la ecuación $z + 2\overline{z} = 6 - 4i$ para z .

Solución. Tomando conjugado de ambos lados de la ecuación, obtenemos que $\overline{z + 2\overline{z}} = \overline{6 - 4i} = 6 + 4i$. Aplicando el resultado del Ejemplo 3.4.3, tenemos que $\overline{z} + \overline{2\overline{z}} = 6 + 4i$. Aplicando ahora el resultado del Ejemplo 3.4.5, obtenemos que $\overline{z} + 2\overline{\overline{z}} = 6 + 4i$. Por último, aplicando el resultado del Ejemplo 3.4.4, resulta que $\overline{z} + 2z = 6 + 4i$. Ahora vamos a resolver el sistema de ecuaciones, en las incógnitas z y $\overline{z}$, formado por las ecuaciones $z + 2\overline{z} = 6 - 4i$ y $\overline{z} + 2z = 6 + 4i$.

Multiplicando la segunda ecuación por -2 , obtenemos que $-2\overline{z} - 4z = -12 - 8i$.

Sumando esta ecuación a la primera ecuación del sistema, obtenemos la ecuación $-3z = -6 - 12i$, de donde se sigue que $z = \frac{-6-12i}{-3} = 2 + 4i$.

Se deja de ejercicio resolver la ecuación, sin usar propiedades del conjugado. ■

Ejemplo 3.4.7 Conjugado de un producto de dos números complejos

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2),$$

por lo que $\overline{z_1 \cdot z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1 x_2 - x_1 y_2 i - y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + y_1 x_2)i.\end{aligned}$$

De esta forma, obtenemos que $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Ejemplo 3.4.8 $z \cdot \bar{z}$ es un número real no negativo

Si $z = x + iy$, entonces $\bar{z} = x - iy$ y

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$$

Como $x^2 + y^2 \geq 0$, concluimos que $z \cdot \bar{z}$ es un número real no negativo.

A continuación, listamos las propiedades del conjugado mostradas en los Ejemplos 3.4.3, 3.4.4, 3.4.7 y 3.4.8, junto con otras propiedades adicionales.

Propiedades del conjugado (3.4.9)

- 1) Si z es un número complejo, $z = \bar{z}$ si y solo si z es un número real.
- 2) Para cualquier número complejo z , $z = \overline{\bar{z}}$.
- 3) Para todo número complejo z , el número $z \cdot \bar{z}$ es un número real no negativo.
- 4) Para cualesquiera números complejos z_1 y z_2 , $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- 5) Para cualesquiera números complejos z_1 y z_2 , $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

6) Para cualquier número complejo $z \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$.

7) Para cualesquiera números complejos z_1 y z_2 , con $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

8) Para cualquier número complejo z , $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ y $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

La expresión que obtuvimos para $z \cdot \bar{z}$ en el Ejemplo 3.4.8, se puede utilizar para calcular el inverso multiplicativo de un número complejo $z \neq 0$, como lo veremos a continuación.

Cálculo del inverso multiplicativo a través del conjugado (3.4.10)

Si $z = x + yi$ es distinto de cero, entonces

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

Observemos que esta expresión coincide con la relación (3.3), que habíamos obtenido antes.

La misma idea que usamos en la Propiedad (3.4.10), de multiplicar y dividir por el conjugado del denominador, la podemos usar para calcular el cociente de dos números complejos, como lo veremos a continuación.

Cociente de números complejos vía el conjugado (3.4.11)

Si $z = x + iy$, $z' = x_1 + iy_1$ y $z \neq 0$, entonces

$$\frac{z'}{z} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x_1x + y_1y}{x^2 + y^2} + i \frac{y_1x - x_1y}{x^2 + y^2}.$$

Observemos que esta expresión coincide con la relación (3.4) que habíamos obtenido antes.

Ejemplo 3.4.12

Calcular la suma $\frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i}$ y escribir la respuesta en forma algebraica.

Solución. Primero vamos a escribir cada cociente en forma algebraica y al final sumaremos los resultados.

De acuerdo con (3.4.11), tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{5+5i}{3-4i} &= \frac{(5+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{(5+5i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{-5+35i}{25}, \\ \frac{20}{4+3i} &= \frac{20(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{20(4-3i)}{4^2+3^2} = \frac{80-60i}{25}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} = \frac{-5+35i}{25} + \frac{80-60i}{25} = \frac{75-25i}{25} = \frac{75}{25} - \frac{25i}{25} = 3-i.$$

**Ejemplo 3.4.13 Relaciones entre z , $\bar{z}$, $\operatorname{Re}(z)$ y $\operatorname{Im}(z)$**

Si $z = x + iy$, entonces $\bar{z} = x - iy$ y, por lo tanto, $z + \bar{z} = 2x$ y $z - \bar{z} = 2yi$. Luego, tenemos las relaciones

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Ejemplo 3.4.14

Describir algebraica y geoméricamente, todos los números complejos z que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{z + \bar{z}}{2} = 6.$

b) $z - \bar{z} = -2\sqrt{7}i.$

c) $(3+2i)z + (3-2i)\bar{z} = 36.$

Solución. a) De acuerdo con el Ejemplo 3.4.13, tenemos que $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$. Así que estamos buscando los números complejos z tales que $\operatorname{Re}(z) = 6$. Geométricamente, es la recta vertical que pasa por el punto $(6, 0)$.

b) El lado izquierdo de la ecuación es muy parecido a la expresión para $\operatorname{Im}(z)$ que se obtuvo en el Ejemplo 3.4.13. Basta dividir por $2i$ ambos lados de la ecuación para obtener tal forma. Haciendo esto, obtenemos que $\operatorname{Im}(z) = -\sqrt{7}$. Así que los números complejos z que estamos buscando, son precisamente aquellos que tienen parte imaginaria igual a $-\sqrt{7}$. Geométricamente, es la recta horizontal que pasa por el punto $(0, -\sqrt{7})$.

c) A diferencia de los dos incisos anteriores, no podemos relacionar fácilmente la ecuación dada a una de las expresiones que obtuvimos en el Ejemplo 3.4.13. Así que comenzaremos por escribir a z como $x + iy$. La ecuación dada tiene la forma

$$(3 + 2i)(x + iy) + (3 - 2i)(x - iy) = 36.$$

Desarrollando los productos y simplificando, obtenemos que $3x - 2y = 18$, la cual es una ecuación lineal. Así, los números complejos $z = (x, y)$ que estamos buscando, son aquellos que se encuentran sobre la recta $3x - 2y = 18$.



Actividad de Aprendizaje 3.4.15

- 1) (S) Si $\omega = 2 + 3i$ y $z = 4 - 5i$, determina la forma algebraica de $\frac{2}{z + \bar{\omega}}$.
- 2) (S) Utilizando la idea de la Observación 3.4.10, calcula el inverso multiplicativo del número $2 + i\sqrt{5}$.
- 3) (S) Utilizando la idea de la Observación 3.4.11, escribe en forma algebraica el número $\frac{19 + 7i}{9 - i}$.
- 4) (S) Grafica al conjunto de los números complejos z que satisfacen la ecuación $z + \bar{z} = 4$.
- 5) (SA) Resuelve la ecuación $3z + 4\bar{z} = 12 - 5i$ para z , utilizando propiedades del conjugado.
- 6) (SA) Determina todos los números complejos z tales que $\bar{z}^2 = z$.
- 7) (SA) Describe geométricamente al conjunto de los números complejos z que satisfacen que $(3 + 4i)z$ es un número real.
- 8) (SS) Si z_1 y z_2 son números complejos y $\omega = z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2$ determina $\bar{\omega}$.

Actividad de Aprendizaje 3.4.15 (Continuación)

- 9) (SS) Determina todos los números complejos $z \neq 0$ tales que $z + \frac{1}{z}$ sea un número real. (Sugerencia: Usa la Propiedad 1) de las Propiedades (3.4.9)).
- 10) (SS) Determina todos los números complejos z tales que $\frac{z}{\bar{z}}$ sea un número real.

3.5. Módulo de un número complejo

Módulo de un número complejo (3.5.1)

Si $z = x + iy$ es un número complejo, el número real $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ es llamado **módulo** o **magnitud** de z . Geométricamente, el módulo o la magnitud de z es la distancia del origen a z .

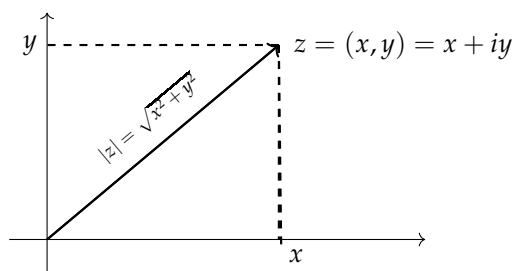


Figura 3.5: El módulo o magnitud del número complejo z es la distancia del origen a z .

Ejemplo 3.5.2

$$\begin{aligned}
 |4 + 3i| &= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5, \\
 |-3i| &= \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3, \\
 |2| &= \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2, \\
 |2 + 2\sqrt{3}i| &= \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.3

Determinar la magnitud del número $\frac{1 + 2i}{2 + i}$.

Solución. Primero vamos a determinar la forma algebraica del cociente. Tenemos que

$$\frac{1 + 2i}{2 + i} = \frac{(1 + 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{4 + 3i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

Ahora, aplicando la definición de magnitud de un número complejo (3.5.1), obtenemos que

$$\left| \frac{1 + 2i}{2 + i} \right| = \left| \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \right| = \sqrt{(4/5)^2 + (3/5)^2} = 1.$$

**Ejemplo 3.5.4 Producto de número complejo por su conjugado**

En el Ejemplo 3.4.8 vimos que $z \cdot \bar{z}$ siempre es un número real no negativo. Más aún, si $z = x + iy$ obtuvimos que $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$. Observando que $x^2 + y^2 = |z|^2$, podemos concluir que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Ejemplo 3.5.5 Módulo de un producto de dos números complejos

Sean z_1 y z_2 números complejos. Aplicando el resultado del Ejemplo 3.5.4 y el resultado del Ejemplo 3.4.7, tenemos que

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) = (z_1 \cdot \overline{z_1})(z_2 \cdot \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

Como todas las magnitudes son números no negativos, concluimos que $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$. Esto significa que el módulo de un producto de dos números complejos, es igual al producto de los módulos de cada número.

En particular, si $z_1 = z_2 = z$, entonces $|z^2| = |z| |z| = |z|^2$. Esto implica que $|z^3| = |z^2 \cdot z| = |z^2| |z| = |z|^2 \cdot |z| = |z|^3$ y así sucesivamente. En general, tenemos que $|z^n| = |z|^n$ para todo entero positivo n .

Ejemplo 3.5.6 Módulo de un cociente de dos números complejos

Si z_1 y z_2 son números complejos con $z_2 \neq 0$, entonces

$$|z_1| = \left| \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \cdot |z_2|,$$

donde la segunda igualdad se sigue por el resultado del Ejemplo 3.5.5.

Luego, tenemos que $|z_1| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \cdot |z_2|$ y, dividiendo ambos lados por $|z_2|$, obtenemos que $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Ejemplo 3.5.7

Determinar la magnitud del número $(10 + 24i)(8 - 6i)$ sin desarrollar el producto.

Solución. Usaremos el resultado del Ejemplo 3.5.5.

Tenemos que

$$\begin{aligned} |(10 + 24i)(8 - 6i)| &= |10 + 24i| \cdot |8 - 6i| \\ &= \sqrt{10^2 + 24^2} \cdot \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{676} \cdot \sqrt{100} = 26 \cdot 10 = 260. \end{aligned}$$



A continuación, listamos las propiedades de los Ejemplos 3.5.4, 3.5.5 y 3.5.6, junto con otras propiedades del módulo de un número complejo.

Propiedades del módulo (3.5.8)

Para cualesquiera números complejos z, z_1 y z_2 , tenemos lo siguiente:

- 1) $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$ y $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$.
- 2) $|z| \geq 0$. Más aún, $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.
- 3) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$.
- 4) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
- 5) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- 6) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.
- 7) (Desigualdad del triángulo). $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- 8) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ si $z \neq 0$.
- 9) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ si $z_2 \neq 0$.

Ejemplo 3.5.9 Interpretación geométrica del módulo de una diferencia

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, la distancia entre z_1 y z_2 en el plano complejo, es lo mismo que la distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano cartesiano. Esto significa que la distancia entre z_1 y z_2 es $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Por otro lado, tenemos que

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

y, de acuerdo con la definición de módulo de un número complejo (3.5.1), resulta que $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Por lo tanto, podemos concluir que la distancia entre los números complejos z_1 y z_2 en el plano complejo es igual a $|z_1 - z_2|$.

Ejemplo 3.5.10

Describir la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones.

- a) $|z| = 3$.
- b) $|z - 4| = 3$.
- c) $|z + 5 - 4i| = 2\sqrt{2}$.

- Solución.** a) Si $|z| = 3$, entonces la distancia desde z al origen en el plano complejo es 3. Por lo tanto, z está en una circunferencia con centro en el origen y radio 3. Más aún, cada punto z de esta circunferencia satisface la ecuación $|z| = 3$, ya que cada punto de esta circunferencia dista 3 unidades desde el origen. Por lo tanto, la gráfica de $|z| = 3$ describe una circunferencia de radio 3 con centro en el origen.
- b) De acuerdo con el Ejemplo 3.5.9, la ecuación $|z - 4| = 3$ significa que la distancia entre z y 4 en el plano complejo es 3, por lo que la gráfica es una circunferencia de radio 3 con centro en el punto que representa el número 4. Como $4 = 4 + 0i$, el centro de esta circunferencia está sobre el eje real, 4 unidades a la derecha del origen.
- c) Observemos que $z + 5 - 4i = z - (-5 + 4i)$. Entonces, de acuerdo con el Ejemplo 3.5.9, la gráfica de la ecuación $|z + 5 - 4i| = 2\sqrt{2}$ consiste de todos los puntos que están a una distancia de $2\sqrt{2}$ del número $-5 + 4i$. Por lo tanto, la gráfica es una circunferencia de radio $2\sqrt{2}$ con centro en $-5 + 4i$.

**Ejemplo 3.5.11 Punto medio del segmento entre dos números complejos**

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} + i \frac{(y_1 + y_2)}{2}.$$

Por otro lado, el punto medio del segmento que une z_1 y z_2 , corresponde al punto medio del segmento que une a los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . Este punto medio en el plano es $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$, el cual coincide con el número complejo $\frac{z_1 + z_2}{2}$.

Ejemplo 3.5.12

Determinar los números complejos z tales que $|z - 3| = |z + 2i|$.

Solución (Método algebraico). Haciendo $z = x + iy$, obtenemos la ecuación

$$|(x - 3) + iy| = |x + i(y + 2)|.$$

Aplicando la definición de módulo de un número complejo (3.5.1) en cada lado de esta ecuación, obtenemos que

$$\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y + 2)^2}.$$

Elevando ambos lados de esta ecuación al cuadrado y desarrollando cada binomio al cuadrado, obtenemos que $x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4$. Simplificando esta ecuación, resulta que $6x + 4y = 5$. Por lo tanto, los números complejos que satisfacen la ecuación $|z - 3| = |z + 2i|$ son los puntos (x, y) que están en la recta cuya ecuación es $6x + 4y = 5$. ■

Solución alternativa (Método geométrico). Reescribamos la ecuación de tal manera que ambas magnitudes sean diferencias entre números complejos, $|z - 3| = |z - (-2i)|$. De acuerdo con el Ejemplo 3.5.9, el lado izquierdo de esta ecuación representa la distancia desde z a 3 en el plano complejo, mientras que el lado derecho es la distancia desde z a $-2i$ en el plano complejo. Por lo tanto, los números complejos z que satisfacen la ecuación dada, están a la misma distancia de 3 que de $-2i$ en el plano complejo. Por lo tanto, z está en la mediatriz del segmento que une a 3 con $-2i$ en el plano complejo. Como la pendiente de la recta que une a 3 con $-2i$ es $2/3$, la pendiente de su mediatriz es $-3/2$, pues cada segmento de recta es perpendicular a su mediatriz. Además, la mediatriz pasa por el punto medio de 3 y $-2i$, el cual es $\frac{3-2i}{2} = \frac{3}{2} - i$ según el Ejemplo 3.5.11, por lo que esta mediatriz tiene por ecuación

$$y - (-1) = -\frac{3}{2} \left(x - \frac{3}{2} \right),$$

esto es, $6x + 4y = 5$. ■

Ejemplo 3.5.13

Si z_1 y z_2 son números complejos, expresar $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ en términos de $|z_1|$ y $|z_2|$.

Solución. Aplicando la Propiedad (3.5.8)-4) y la Propiedad (3.4.9)-4), tenemos que

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2.\end{aligned}$$

De manera análoga, obtenemos que

$$\begin{aligned}|z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + |z_2|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (|z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2) + (|z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + |z_2|^2) \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).\end{aligned}$$



Ejemplo 3.5.14

Calcular la magnitud del número complejo $\frac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}}$.

Solución. Utilizando las Propiedades 5) y 9) del módulo de un número complejo (3.5.8), tenemos que

$$\begin{aligned}\left| \frac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}} \right| &= \frac{|(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5|}{|(-1-i\sqrt{3})^{10}|} = \frac{|(1-i)^{10}| \cdot |(\sqrt{3}+i)^5|}{|(-1-i\sqrt{3})^{10}|} \\ &= \frac{|(1-i)|^{10} \cdot |(\sqrt{3}+i)|^5}{|(-1-i\sqrt{3})|^{10}}.\end{aligned}$$

Luego, basta calcular las magnitudes de los números $1-i$, $\sqrt{3}+i$ y $-1-i\sqrt{3}$. Es fácil ver que $|1-i| = \sqrt{2}$, $|\sqrt{3}+i| = 2$ y $|-1-i\sqrt{3}| = 2$. Por lo tanto,

$$\left| \frac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}} \right| = \frac{(\sqrt{2})^{10}(2^5)}{2^{10}} = \frac{2^5(2^5)}{2^{10}} = 1.$$



Ejemplo 3.5.15

Sean z_1 y z_2 números complejos tales que $z_1 z_2 \neq -1$ y $|z_1| = |z_2| = 1$. Si $A = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$, determinar $\overline{A}$.

Solución. Utilizando la Propiedad 4) del módulo de un número complejo (3.5.8), tenemos que $z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = 1$, de donde obtenemos que $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$ (observa que $z_1 \neq 0$ ya que $|z_1| = 1$). De manera análoga, tenemos que $z_2 \overline{z_2} = |z_2|^2 = 1$, de donde $\overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$ (observa que $z_2 \neq 0$ ya que $|z_2| = 1$). Por lo tanto,

$$\overline{A} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{1 + \overline{z_1 z_2}} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}} = \frac{\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}}{\frac{z_1 z_2 + 1}{z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = A.$$

**Actividad de Aprendizaje 3.5.16**

- 1) (S) Determina todos los números complejos z tales que $(z - 2)(\overline{z} + i)$ sea un número real.
- 2) (S) Determina la magnitud del número $\frac{(2\sqrt{3} + 2i)^8}{(1 - i)^6} + \frac{(1 + i)^6}{(2\sqrt{3} - 2i)^8}$.
- 3) (S) Sean z_1 y z_2 números complejos. Si $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ y $|z_1| = |z_2| = 1$, determina el valor numérico de $|z_1 - z_2|$.
- 4) (S) Determina los números complejos z tales que $|z - 2 + i| = 6$.
- 5) (S) Determina los números complejos z tales que $|z - i| = |z + i|$.
- 6) (SA) Determina los números complejos z tales que $|z| = 1$ y $|z^2 + \overline{z}^2| = 1$.
- 7) (SA) Si z es cualquier número complejo, verifica que $|z| = |\overline{z}|$.
- 8) (SA) Determina todos los números complejos z tales que $|z| = \left| \frac{1}{z} \right|$.
- 9) (SA) Verifica las siguientes identidades, donde z_1, z_2 y z_3 denotan números complejos.
 - a) $|1 + z_1 \overline{z_2}|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$.

Actividad de Aprendizaje 3.5.16 (Continuación)

b) $|1 - z_1 \overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2).$

10) (SS) Determina todos los enteros positivos n tales que

$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2.$$

11) (SS) Sean z_1, z_2 y z_3 números complejos de módulo 1. Si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, determina el valor numérico de $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

12) (SS) El objetivo de este ejercicio es justificar la desigualdad del triángulo que aparece en la lista de Propiedades 3.5.8.

a) Explica por qué es suficiente justificar que $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$.

b) Desarrolla $|z_1 + z_2|^2$ utilizando los resultados de los Ejemplos 3.5.4 y 3.4.3.

c) Desarrolla $(|z_1| + |z_2|)^2$.

d) Justifica la desigualdad $\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \leq |z_1 z_2|$.

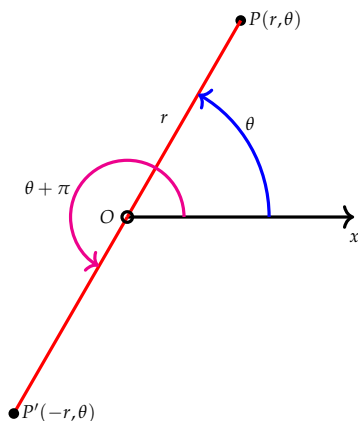
e) Concluye que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

3.6. Forma polar de un número complejo

Además del sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares existen otros sistemas de coordenadas. En esta sección describiremos el **sistema de coordenadas polares**, que es conveniente para ciertos fines, por ejemplo para representar números complejos.

En el sistema de coordenadas cartesianas, cada punto del plano se localiza refiriendo el punto a dos rectas perpendiculares fijas llamadas ejes de coordenadas. En el sistema de coordenadas polares, cada punto se localiza especificando su posición relativa a una recta fija y a un punto fijo en esa recta. La recta fija se llama **eje polar** y corresponde al eje x en las coordenadas cartesianas; el punto fijo se llama **polo** y corresponde al origen $O(0,0)$ en las coordenadas cartesianas. Cada punto P del plano se determina por su distancia r al polo y el ángulo θ que forma el rayo OP con la dirección positiva del eje polar. La distancia r es la **coordenada radial** y θ es la **coordenada angular** o **ángulo polar**. De esta manera, (r, θ) son las coordenadas polares de P . Si P es el origen o polo, entonces $r = 0$ y se conviene que $(0, \theta)$ representa al polo para cualquier valor de θ . El ángulo polar θ se mide partiendo del eje polar hacia el rayo OP ; el valor de θ es positivo si se mide

en sentido anti-horario y negativo si se mide en sentido horario. El ángulo polar usualmente se mide en radianes.



A continuación, se extiende el significado de las coordenadas polares para incluir coordenadas radiales negativas. Si $r > 0$, el punto $P'(-r, \theta)$ se localiza sobre la recta OP a la misma distancia r desde O , pero P y P' se encuentran en lados opuestos de O . Cada par de coordenadas polares (r, θ) determina un punto y solamente un punto en el plano. Sin embargo, el recíproco no es verdadero, si (r, θ) son las coordenadas de un punto P , entonces $(r, \theta + 2\pi k)$, donde k es un entero cualquiera, representa al mismo punto P . Esta es una diferencia importante con el sistema de coordenadas cartesianas, pues ahí se tiene una correspondencia biyectiva entre los puntos del plano con sus correspondientes coordenadas rectangulares. Si la coordenada radial r es positiva y el ángulo polar θ está en el rango $-\pi < \theta \leq \pi$, al par (r, θ) se le conoce como un **par principal** de coordenadas polares.

Relaciones entre las coordenadas cartesianas y polares (3.6.1)

Si un punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ) , entonces

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (3.5)$$

Estas relaciones provienen de las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Se sabe que en un triángulo rectángulo, el seno de un ángulo agudo es igual a la longitud del cateto opuesto al ángulo entre la longitud de la hipotenusa; el coseno de un ángulo agudo es igual a la longitud del

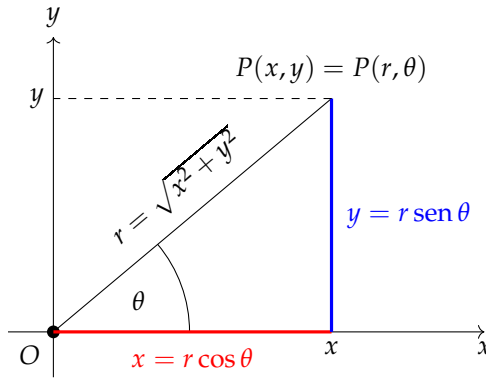


Figura 3.6: Relación entre coordenadas cartesianas y polares.

cateto adyacente al ángulo, entre la longitud de la hipotenusa.

Es conveniente enfatizar que las fórmulas que relacionan las coordenadas rectangulares de z con sus coordenadas polares son independientes del cuadrante en que se encuentre el punto P , esto es, no depende si el ángulo θ es agudo o no.

Si P está en el segundo cuadrante, el ángulo θ está entre $\frac{\pi}{2}$ y π . En este caso, el ángulo $\pi - \theta$ es agudo, $x < 0$ y $y > 0$.

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(\pi - \theta) = \frac{y}{r}$$

$$-\cos \theta = \cos(\pi - \theta) = \frac{-x}{r}$$

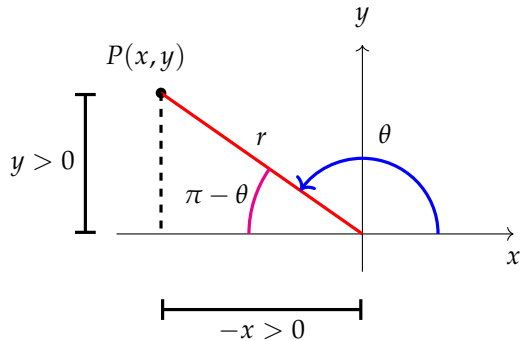


Figura 3.7: El punto $P(x, y)$ está en el segundo cuadrante, por lo que $x < 0$ y $y > 0$. Por lo tanto, las longitudes de los catetos opuesto y adyacente al ángulo $\pi - \theta$ son y , $-x$, respectivamente.

Si P está en el tercer cuadrante, el ángulo θ está entre π y $\frac{3\pi}{2}$. El ángulo $\theta - \pi$

es agudo, $x < 0$ y $y < 0$.

$$-\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(\theta - \pi) = \frac{-y}{r}$$

$$-\cos \theta = \cos(\theta - \pi) = \frac{-x}{r}$$

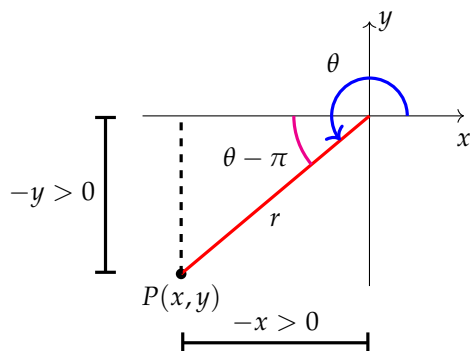


Figura 3.8: El punto $P(x, y)$ está en el tercer cuadrante, por lo que $x < 0$ y $y < 0$. Por lo tanto, las longitudes de los catetos opuesto y adyacente al ángulo $\theta - \pi$ son $-y$, $-x$, respectivamente.

Finalmente, si P está en el cuarto cuadrante, el ángulo θ está entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π . El ángulo $2\pi - \theta$ es agudo, $x > 0$ y $y < 0$. Entonces,

$$-\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(2\pi - \theta) = \frac{-y}{r}, \quad \cos \theta = \cos(2\pi - \theta) = \frac{x}{r}.$$

Ejemplo 3.6.2

Calcular las coordenadas rectangulares del punto P cuyas coordenadas polares son $(2, \pi/3)$.

Solución. Como $r = 2$ y $\theta = \pi/3$, el punto P está en el primer cuadrante. Luego,

$$x = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \frac{1}{2} = 1, \quad y = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Por lo tanto, las coordenadas cartesianas de P son $(1, \sqrt{3})$. ■

Cada número complejo z distinto de cero se puede expresar en forma polar. Dado que $z = (x, y)$ es un punto en el plano complejo, z tiene un par de coordenadas polares (r, θ) donde

$$x = |z| \cos \theta, \quad y = |z| \operatorname{sen} \theta, \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (3.6)$$

Nos referimos al ángulo θ como **un argumento** de z y escribiremos $\arg(z)$. Nótese que decimos un argumento en vez de decir **el** argumento ya que el ángulo θ está determinado en forma única salvo por múltiplos enteros de 2π . Como las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π , existe una infinidad de valores de θ que satisfacen las Ecuaciones (3.6), pero cualesquiera dos de estos valores difieren por algún múltiplo de 2π . Una **forma polar** de z es:

$$z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Otras formas polares de z se obtienen sumando o restando múltiplos de 2π :

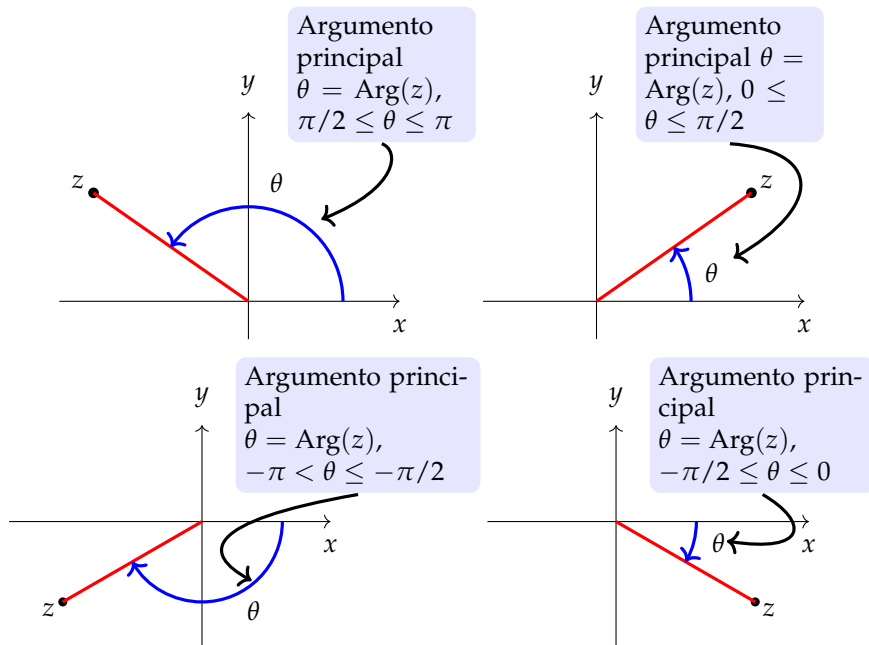
$$z = |z| (\cos(\theta + 2\pi k) + i \operatorname{sen}(\theta + 2\pi k)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como es deseable tener unicidad en el argumento seleccionaremos uno y solamente uno de los valores de θ y a ese lo llamaremos **el argumento principal** de z . Para hacer esto restringiremos θ a un intervalo semiabierto de longitud 2π . Los intervalos $[0, 2\pi)$ y $(-\pi, \pi]$ son los que se usan comúnmente para este propósito. Nosotros usaremos el intervalo $(-\pi, \pi]$ y nos referiremos al correspondiente θ como el argumento principal de $z = x + yi$ y lo denotaremos por $\theta = \operatorname{Arg} z$. Así, si

$z = x + yi \neq 0$, el argumento principal de z es el único número real θ que satisface las condiciones

$$x = |z| \cos \theta, \quad y = |z| \sin \theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

En las siguientes figuras se ilustra el argumento principal del número z dependiendo del cuadrante en el que se encuentra.



Para calcular una forma polar de un número complejo a partir de su forma rectangular, es necesario determinar el valor del ángulo θ . Para esto se recurre a las funciones trigonométricas inversas, por ejemplo a las funciones arcoseno o arcocoseno. Como la tangente del ángulo θ no depende de r ($\tan \theta = \frac{y}{x}$), es más frecuente calcular θ usando la función arcotangente. La función tangente $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suprayectiva, pero no es inyectiva ya que es una función periódica con período π . La gráfica de la función tangente se muestra a continuación.

Restringiendo el dominio de la tangente, por ejemplo al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, se obtiene la función $f: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \tan(x)$, la cual es biyectiva. La función $g: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ dada por $g(x) = \arctan(x)$ es la inversa de f . La gráfica de la función g se muestra a continuación.

Obsérvese que la función arcotangente siempre regresa un ángulo agudo. Para el cálculo de los argumentos se debe tener muy presente que:

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ y } \tan(\beta) = y/x \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = \arctan(y/x).$$

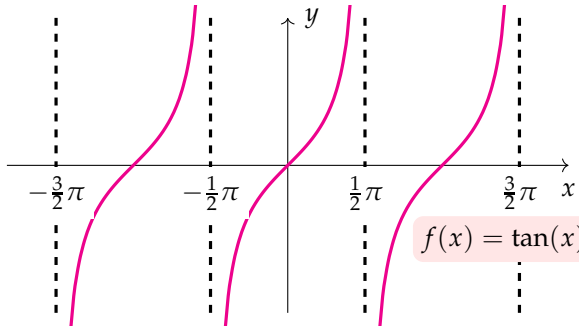


Figura 3.9: La función tangente $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suprayectiva; no es inyectiva porque es periódica (con período π). Restringiendo su dominio al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ se obtiene que la función $(-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \tan(x)$ es biyectiva.

Cálculo del argumento principal (3.6.3)

Si $z = x + iy \neq 0$, entonces su argumento principal está dado por

$$\text{Arg } z = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } y > 0, x = 0, \\ -\pi/2 & \text{si } y < 0, x = 0, \\ \arctan(y/x) & \text{si } x > 0, \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{si } y \geq 0, x < 0, \\ -\pi + \arctan(y/x) & \text{si } y < 0, x < 0. \end{cases}$$

Si se requiere calcular argumentos positivos, basta con sumar un múltiplo adecuado de 2π a los argumentos negativos.

Ejemplo 3.6.4

Una forma polar del número i es $i = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i \sin \pi/2$.

Ejemplo 3.6.5

Una forma polar de -1 es $-1 = \cos \pi + i \sin \pi = \cos \pi$.

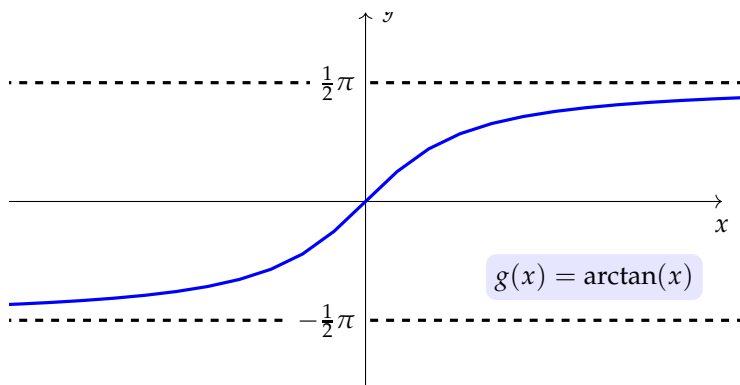


Figura 3.10: La función $g: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ dada por $g(x) = \arctan(x)$ es la inversa de la función $f: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \tan(x)$.

Ejemplo 3.6.6

El módulo del número complejo $\sqrt{3} + i$ es $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ y, el arco cuya tangente es $1/\sqrt{3}$, es $\pi/6$. Así, el argumento principal de $\sqrt{3} + i$ es $\pi/6$. Una forma polar de $\sqrt{3} + i$ es $2(\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6))$.

Ejemplo 3.6.7

Determinar dos formas polares del número complejo $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Solución. El módulo de z es 2. Observando que z está en el cuarto cuadrante, aplicando la fórmula (3.6.3) tenemos que $\text{Arg } z = \arctan(-\sqrt{3}/1) = -\pi/3$. Luego, una forma polar de z es $2(\cos(-\pi/3) + i \sin(-\pi/3))$.

Para obtener un argumento positivo, basta sumar 2π al argumento principal, esto es, $2\pi - \pi/3 = 5\pi/3$. Así, otra forma polar de z es $2(\cos 5\pi/3 + i \sin 5\pi/3)$. ■

Ejemplo 3.6.8

Escribir en forma algebraica el número $z = 4(\cos(7\pi/6) + i \sin(7\pi/6))$.

Solución. Tenemos que $\sin(7\pi/6) = \sin(\pi + \pi/6) = -\sin(\pi/6) = -1/2$ y $\cos(7\pi/6) = \cos(\pi + \pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$, de donde se sigue que $z = -2\sqrt{3} - 2i$. ■

Ejemplo 3.6.9 Forma polar de un producto de dos números complejos

Si $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ y $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= |z_1| |z_2| ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

En otras palabras, cuando multiplicamos dos números complejos, se multiplican sus magnitudes y se suman sus argumentos.

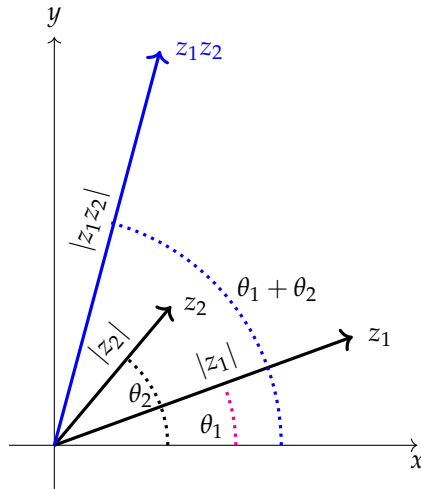


Figura 3.11: El producto de z_1 y z_2 es el número complejo cuyo módulo es $|z_1||z_2|$ y cuyo argumento es la suma de los argumentos de z_1 y z_2 .

El resultado del Ejemplo 3.6.9 junto con otros resultados análogos se presentan a continuación.

Operaciones con números complejos en forma polar (3.6.10)

Sean $z_1 = |z_1| (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ y $z_2 = |z_2| (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ números complejos en forma polar. Entonces,

$$1) \ z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)),$$

$$2) \ z_1^{-1} = \frac{1}{|z_1|} (\cos(-\theta_1) + i \operatorname{sen}(-\theta_1)) \text{ si } z_1 \neq 0,$$

$$3) \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)) \text{ si } z_2 \neq 0,$$

$$4) \ \overline{z_1} = |z_1| (\cos(-\theta_1) + i \operatorname{sen}(-\theta_1)).$$

Ejemplo 3.6.11

Si $z_1 = 3 (\cos \pi/12 + i \operatorname{sen} \pi/12)$ y $z_2 = 5 (\cos \pi/8 + i \operatorname{sen} \pi/8)$, entonces de acuerdo con las relaciones en (3.6.10), tenemos que

$$z_1 z_2 = 3 \cdot 5 \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} \right) \right) = 15 \left(\cos \frac{5\pi}{24} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{24} \right),$$

$$z_1^{-1} = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{-\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{12} \right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{8} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{8} \right) \right) = \frac{3}{5} \left(\cos \frac{-\pi}{24} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{24} \right).$$

Ejemplo 3.6.12

Si $z = 3 (\cos \pi/12 + i \operatorname{sen} \pi/12)$, calcular z^2 y z^3 .

Solución. Aplicando el resultado del Ejemplo 3.6.9, tenemos que

$$\begin{aligned} z^2 &= 3^2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) \right) = 9 \left(\cos \frac{2\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{12} \right) \\ &= 9 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right), \\ z^3 &= z^2 z = 9 \cdot 3 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) \right) = 27 \left(\cos \frac{3\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{12} \right) \\ &= 3^3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$



También podemos usar las relaciones en (3.6.10) para calcular potencias negativas de números complejos.

Ejemplo 3.6.13

Si $z = 3 (\cos \pi/12 + i \operatorname{sen} \pi/12)$, entonces

$$\begin{aligned} z^{-2} &= (z^{-1})^2 = \left(\frac{1}{3} \left(\cos \frac{-\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{12} \right) \right)^2 = \frac{1}{3^2} \left(\cos \frac{-2\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{-2\pi}{12} \right) \\ &= \frac{1}{3^2} \left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Actividad de Aprendizaje 3.6.14

- 1) (S) Determina dos formas polares para los números $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$.
- 2) (S) Calcula una forma polar para los siguientes números complejos: $-1 - i$, $2 + 2i$, $-1 + i\sqrt{3}$ y $1 - i\sqrt{3}$, usando el argumento principal.
- 3) (S) Escribe los siguientes números complejos en forma algebraica:
 - a) $2 (\cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3)$,
 - b) $2 (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$,
 - c) $(\cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2)$,
 - d) $4 (\cos 3\pi/2 + i \operatorname{sen} 3\pi/2)$.
- 4) (S) Determina una forma polar para i^3 y una forma polar para i^{-3} .

Actividad de Aprendizaje 3.6.14 (Continuación)

- 5) (S) En el plano complejo, ubica los números complejos $2 + 3i$, $1 + 2i$ y $(2 + 3i)(1 + 2i)$ para verificar que las magnitudes se multiplican y los argumentos se suman para formar el producto.
- 6) (SA) Sea $z = \cos(-2\pi/3) + i \operatorname{sen}(-2\pi/3)$. En el mismo plano complejo, ubica a los números z, z^2, z^3, z^4, z^5 y z^6 .
- 7) (SA) Si $z_1 = \cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3$ y $z_2 = \cos 11\pi/6 + i \operatorname{sen} 11\pi/6$, determina un argumento positivo para $\frac{2z_1^2}{z_2}$.
- 8) (SA) Sean $z_1 = \cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3$ y $z_2 = \cos \pi/4 - i \operatorname{sen} \pi/4$.
 - a) Determina el producto $z_1 z_2$ en forma polar.
 - b) Determina el producto $z_1 z_2$ en forma algebraica.
 - c) Determina los valores de $\cos \pi/12$ y $\operatorname{sen} \pi/12$.
- 9) (SA) Si $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \neq 0$, determina una forma polar para $(\bar{z})^{-1}$.
- 10) (SS) Determina los números complejos z tales que $|z| = 1$ y $\left| \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1$.
- 11) (SS) Determina el argumento principal del número $\frac{\sqrt{3} + i}{1 + i}$.
- 12) (SS) Justifica los incisos 2), 3) y 4) de la Propiedad (3.6.10).

3.7. Potencias de números complejos

Si n es un entero positivo y $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, aplicando n veces el resultado del Ejemplo 3.6.9, obtenemos que

$$z^n = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdots |z|}_n (\cos(\underbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}_n) + i \operatorname{sen}(\underbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}_n)),$$

esto es,

$$z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)). \quad (3.7)$$

La relación (3.7) es conocida como **fórmula de D'Moivre**. Algunas consecuencias de la fórmula de D'Moivre son las siguientes:

- 1) $|z^n| = |z|^n$ para cualquier entero positivo n .
- 2) Si $|z| = 1$, entonces $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$, para cualquier entero positivo n .

Ejemplo 3.7.1

Escribir en forma algebraica el número $(1 + i)^{100}$.

Solución. Una forma polar del número $1 + i$ es $\sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4)$. Usando ahora la Fórmula de D'Moivre (3.7), obtenemos que

$$(1 + i)^{100} = (\sqrt{2})^{100} \left(\cos \frac{100\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{100\pi}{4} \right) = 2^{50} (\cos 25\pi + i \operatorname{sen} 25\pi).$$

Como $\cos 25\pi = -1$ y $\operatorname{sen} 25\pi = 0$, concluimos que $(1 + i)^{100} = -2^{50}$. ■

Ejemplo 3.7.2

Aplicando la consecuencia 2) de la fórmula de D'Moivre (3.7) con $n = 2$, tenemos que $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2 = \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta$. Desarrollando el binomio al cuadrado del lado izquierdo, obtenemos que

$$\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta + 2i \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta. \quad (3.8)$$

Igualando las partes reales, obtenemos la identidad $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$. Usando la identidad $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, obtenemos la siguiente fórmula para $\cos 2\theta$ en función de $\cos \theta$: $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$. Igualando las partes imaginarias de la relación (3.8), obtenemos la identidad $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$.

Ejemplo 3.7.3

Escribir en forma algebraica el número $\frac{(1 - i)^{10}(\sqrt{3} + i)^5}{(-1 - i\sqrt{3})^{10}}$.

Solución. Primero vamos a escribir a los números de cada paréntesis en forma polar. Tenemos que

$$\begin{aligned}1 - i &= \sqrt{2} (\cos 7\pi/4 + i \operatorname{sen} 7\pi/4), \\ \sqrt{3} + i &= 2 (\cos \pi/6 + i \operatorname{sen} \pi/6), \\ -1 - i\sqrt{3} &= 2 (\cos 4\pi/3 + i \operatorname{sen} 4\pi/3).\end{aligned}$$

Aplicando ahora la fórmula de D'Moivre (3.7), obtenemos que

$$\begin{aligned}(1 - i)^{10} &= (\sqrt{2})^{10} (\cos 70\pi/4 + i \operatorname{sen} 70\pi/4) = 2^5 (\cos 35\pi/2 + i \operatorname{sen} 35\pi/2), \\ (\sqrt{3} + i)^5 &= 2^5 (\cos 5\pi/6 + i \operatorname{sen} 5\pi/6), \\ (-1 - i\sqrt{3})^{10} &= 2^{10} (\cos 40\pi/3 + i \operatorname{sen} 40\pi/3).\end{aligned}$$

Aplicando ahora el resultado 1) de (3.6.10), obtenemos que

$$\begin{aligned}(1 - i)^{10}(\sqrt{3} + i)^5 &= 2^5 (\cos 35\pi/2 + i \operatorname{sen} 35\pi/2) 2^5 (\cos 5\pi/6 + i \operatorname{sen} 5\pi/6) \\ &= 2^{10} \left(\cos \left(\frac{35\pi}{2} + \frac{35\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{35\pi}{2} + \frac{35\pi}{6} \right) \right) \\ &= 2^{10} (\cos 55\pi/3 + i \operatorname{sen} 55\pi/3).\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el resultado 3) de (3.6.10), obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{(1 - i)^{10}(\sqrt{3} + i)^5}{(-1 - i\sqrt{3})^{10}} &= \frac{2^{10} (\cos 55\pi/3 + i \operatorname{sen} 55\pi/3)}{2^{10} (\cos 40\pi/3 + i \operatorname{sen} 40\pi/3)} \\ &= \cos \left(\frac{55\pi}{3} - \frac{40\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{55\pi}{3} - \frac{40\pi}{3} \right) \\ &= \cos 5\pi + i \operatorname{sen} 5\pi = -1.\end{aligned}$$

■

La fórmula de D'Moivre también es válida cuando $z \neq 0$ y el entero n es negativo. Observemos que si $n < 0$, entonces $-n > 0$. Como $z^n = (z^{-1})^{-n}$, podemos aplicar la fórmula (3.7) con el número complejo z^{-1} y el entero positivo $-n$, obteniendo

$$\begin{aligned}z^n &= (z^{-1})^{-n} = \left(\frac{1}{|z|} (\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)) \right)^{-n} \\ &= \frac{1}{|z|^{-n}} \left(\cos((-n)(-\theta)) + i \operatorname{sen}((-n)(-\theta)) \right) \\ &= |z|^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Ejemplo 3.7.4

Escribir en forma algebraica el número $(-1 - i)^{-2}$.

Solución. Una forma polar de $-1 - i$ es $\sqrt{2} \left(\cos \frac{-3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{-3\pi}{4} \right)$. Aplicando la fórmula de D'Moivre (3.9) con $n = -2$, obtenemos que

$$\begin{aligned} (-1 - i)^{-2} &= (\sqrt{2})^{-2} \left(\cos(-2) \left(\frac{-3\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen}(-2) \left(\frac{-3\pi}{4} \right) \right) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left(\cos \frac{6\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Como $\cos 3\pi/2 = 0$ y $\operatorname{sen} 3\pi/2 = -1$, concluimos que $(-1 - i)^{-2} = -\frac{1}{2}i$. ■

Ejemplo 3.7.5

Si z es un número complejo de magnitud 1 y argumento θ , determinar la suma $z^3 + \frac{1}{z^3}$ en función de θ .

Solución. Sea θ un argumento de z . Como $|z| = 1$, tenemos que $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$. Aplicando las fórmulas de D'Moivre (3.7) con $n = 3$ y (3.9) con $n = -3$, obtenemos que $z^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta$ y $z^{-3} = \cos(-3\theta) + i \operatorname{sen}(-3\theta)$, respectivamente. Usando las identidades $\cos x = \cos(-x)$ y $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x)$, tenemos que $z^{-3} = \cos 3\theta - i \operatorname{sen} 3\theta$. Por lo tanto,

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = z^3 + z^{-3} = (\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta) + (\cos 3\theta - i \operatorname{sen} 3\theta) = 2 \cos 3\theta.$$

En particular, el cálculo anterior muestra que $z^3 + \frac{1}{z^3}$ es un número real. ■

Actividad de Aprendizaje 3.7.6

- 1) (S) Escribe en forma algebraica el número $(\sqrt{3} - i)^8$.
- 2) (S) Escribe en forma algebraica el número $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{-4}$.
- 3) (S) Escribe en forma algebraica la suma $\frac{(2\sqrt{3} + 2i)^8}{(1 - i)^6} + \frac{(1 + i)^6}{(2\sqrt{3} - 2i)^8}$.
- 4) (SA) Sean α , β y γ , las medidas de los ángulos internos de un triángulo. Si $x = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$, $y = \cos \beta + i \operatorname{sen} \beta$ y $z = \cos \gamma + i \operatorname{sen} \gamma$, determina

Actividad de Aprendizaje 3.7.6 (Continuación)

el valor del producto xyz .

- 5) (SA) Si α y β son las raíces de la ecuación $x^2 - 2x + 4 = 0$, determina el valor de $\alpha^6 + \beta^6$.
- 6) (SA) Utilizando la misma idea del Ejemplo 3.7.2, determina fórmulas para $\cos 3\theta$ y para $\sin 3\theta$ en función de $\cos \theta$ y $\sin \theta$, respectivamente.
- 7) (SA) Sea n un entero positivo. Determina $|(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n|$.
- 8) (SS) Simplifica el número $\left(\frac{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}}{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5}} \right)^5$.
- 9) (SS) Simplifica el cociente $\frac{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3}{(\operatorname{sen} \theta + i \cos \theta)^2}$.
- 10) (SS) Sea z un número complejo tal que $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$. Determina una fórmula para $z^n + \frac{1}{z^n}$, donde n denota un entero positivo.

3.8. Raíces n -ésimas de números complejos

Consideremos un entero positivo n y un número complejo $z \neq 0$. Una **raíz n -ésima** de z , es un número complejo ω tal que $\omega^n = z$. Escribimos $\omega = z^{1/n}$.

Ejemplo 3.8.1

Una raíz cuadrada de -1 es i , ya que $i^2 = -1$. Escribimos $i = (-1)^{1/2}$ o $i = \sqrt{-1}$. Otra raíz cuadrada de -1 es $-i$, ya que $(-i)^2 = i^2 = -1$.

Ejemplo 3.8.2

Una raíz cúbica de 8 es 2, ya que $2^3 = 8$. Escribimos $2 = 8^{1/3}$ o $2 = \sqrt[3]{8}$. Otra raíz cúbica de 8 es $-1 + i\sqrt{3}$, ya que

$$\begin{aligned} (-1 + i\sqrt{3})^3 &= (-1)^3 + 3(-1)^2(i\sqrt{3}) + 3(-1)(i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3 \\ &= -1 + i3\sqrt{3} + 9 - i3\sqrt{3} = 8. \end{aligned}$$

Escribimos $-1 + i\sqrt{3} = 8^{1/3}$.

Se deja de ejercicio verificar que $-1 - i\sqrt{3}$ es otra raíz cúbica de 8.

Ejemplo 3.8.3

Observemos que los números 1, -1 , i y $-i$, son raíces cuartas de 1 ya que $1^4 = (-1)^4 = i^4 = (-i)^4 = 1$. La siguiente propiedad (Propiedad (3.8.4)) justifica que estas son todas las raíces cuartas de 1. Es fácil ver que las raíces cuartas de 1 son los vértices de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 1.

Raíces n -ésimas de la unidad (3.8.4)

Sea n un entero positivo. Para calcular las raíces n -ésimas de 1 o de la unidad, debemos resolver la ecuación $\omega^n = 1$. Observemos que $|\omega| = 1$, por lo que una forma polar de ω es $\omega = \cos \theta + i \sen \theta$. Utilizando la fórmula de D'Moivre (3.7), tenemos que $\omega^n = \cos n\theta + i \sen n\theta = 1$. Igualando partes reales y partes imaginarias, obtenemos las relaciones $\cos n\theta = 1$ y $\sen n\theta = 0$, las cuales implican que $n\theta = 2\pi j$ con j un número entero. Haciendo la división de j entre n , obtenemos que $j = nq + r$ donde $0 \leq r < n$ y, por lo tanto, $\theta = \frac{2\pi j}{n} = \frac{2\pi(nq+r)}{n} = 2\pi q + \frac{2\pi r}{n}$. Luego, tenemos que

$$\omega = \cos \theta + i \sen \theta = \cos \frac{2\pi r}{n} + i \sen \frac{2\pi r}{n},$$

ya que las funciones $\sen x$ y $\cos x$ son periódicas de período 2π . Así, es suficiente considerar $\theta_j = \frac{2\pi j}{n}$ para $j = 0, 1, \dots, n-1$. Se puede demostrar que los números complejos $\omega_j = \cos \theta_j + i \sen \theta_j$, con $j = 0, 1, \dots, n-1$, son diferentes entre sí. Por lo que hay n raíces n -ésimas de 1, una para cada valor de j , esto es,

$$\omega_j = \cos \frac{2\pi j}{n} + i \sen \frac{2\pi j}{n}, \quad \text{con } j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.10)$$

Si ω es una raíz n -ésima de la unidad, entonces $\omega^n - 1 = 0$, que es equivalente a $(\omega - 1)(\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1) = 0$. En particular, si $\omega \neq 1$, entonces

$$\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1 = 0. \quad (3.11)$$

Ejemplo 3.8.5

Calcular las raíces quintas de la unidad.

Solución. De acuerdo con la fórmula (3.12), las 5 raíces quintas de la unidad son:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1, \quad \omega_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}, \quad \omega_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{5}, \\ \omega_3 &= \cos \frac{6\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{5}, \quad \omega_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{8\pi}{5}.\end{aligned}$$

Observa que $\omega_0 = \omega_1^0$, $\omega_2 = \omega_1^2$, $\omega_3 = \omega_1^3$ y $\omega_4 = \omega_1^4$. ■

Ejemplo 3.8.6

Si ω es una raíz cúbica de la unidad y ω no es un número real, determinar el valor del producto $(1 - \omega + \omega^2)(1 + \omega - \omega^2)$.

Solución. Como ω es una raíz cúbica de la unidad y no es un número real, en particular tenemos que $\omega \neq 1$. Luego, aplicando la relación (3.11) con $n = 3$, tenemos que $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, esto es, $1 + \omega = -\omega^2$ y $1 + \omega^2 = -\omega$. Por lo tanto,

$$(1 - \omega + \omega^2)(1 + \omega - \omega^2) = (-\omega - \omega)(-\omega^2 - \omega^2) = 4\omega^3 = 4,$$

donde la última igualdad se sostiene porque $\omega^3 = 1$. ■

Raíces n -ésimas de un número $z \neq 0$

(3.8.7)

Sea $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ un número complejo distinto de cero y sea n un entero positivo. Para calcular las raíces n -ésimas de z , debemos resolver la ecuación $\omega^n = z$. Observemos que $|\omega| = |z|^{1/n}$, por lo que $\omega = |z|^{1/n}(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$. Luego, la ecuación $\omega^n = z$ la podemos reescribir como $(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$. Utilizando la fórmula de D'Moivre (3.7), tenemos que $\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$. Igualando partes reales y partes imaginarias, obtenemos las relaciones $\cos n\alpha = \cos \theta$ y $\operatorname{sen} n\alpha = \operatorname{sen} \theta$, las cuales implican que $n\alpha = \theta + 2\pi j$ con j un número entero. Usando un argumento análogo al que usamos en (3.8.4), es suficiente considerar $\alpha_j = \frac{1}{n}(\theta + 2\pi j)$ para $j = 0, 1, \dots, n-1$ y, se puede

demostrar que los números complejos $\omega_j = |z|^{1/n}(\cos \alpha_j + i \operatorname{sen} \alpha_j)$, con $j = 0, 1, \dots, n-1$, son diferentes entre sí. Por lo tanto, hay n raíces n -ésimas de z , una para cada valor de j , esto es,

$$\omega_j = |z|^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi j}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2\pi j}{n} \right), \quad \text{con } j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.12)$$

Ejemplo 3.8.8

Determinar las raíces cuartas del número complejo $z = -8\sqrt{2} + 8i\sqrt{2}$.

Solución. Como z está en el segundo cuadrante, de acuerdo con la fórmula (3.6.3) tenemos que $\operatorname{Arg} z = \pi - \arctan(8\sqrt{2}/(-8\sqrt{2})) = \pi - \arctan(-1) = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$. Además, tenemos que $|z| = \sqrt{8^2 \cdot 2 + 8^2 \cdot 2} = \sqrt{4 \cdot 8^2} = 16$. Así que una forma polar de z es $z = 16(\cos 3\pi/4 + i \operatorname{sen} 3\pi/4)$.

Luego, de acuerdo con la fórmula (3.12), las raíces cuartas de z son los números

$$\omega_j = 16^{1/4} \left(\cos \frac{1}{4} \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi j \right) + i \operatorname{sen} \frac{1}{4} \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi j \right) \right), \quad \text{con } j = 0, 1, 2, 3.$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2 \left(\cos \frac{3}{16}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{16}\pi \right), & \omega_1 &= 2 \left(\cos \frac{11}{16}\pi + i \operatorname{sen} \frac{11}{16}\pi \right), \\ \omega_2 &= 2 \left(\cos \frac{19}{16}\pi + i \operatorname{sen} \frac{19}{16}\pi \right), & \omega_3 &= 2 \left(\cos \frac{27}{16}\pi + i \operatorname{sen} \frac{27}{16}\pi \right). \end{aligned}$$

Si queremos trasladar los argumentos de ω_2 y ω_3 al intervalo $(-\pi, \pi]$ basta con restar 2π a cada uno de ellos. Así, otra representación de las raíces cuartas de z es

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2 \left(\cos \frac{3\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{16} \right), & \omega_1 &= 2 \left(\cos \frac{11\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{16} \right), \\ \omega_2 &= 2 \left(\cos \frac{-13\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{-13\pi}{16} \right), & \omega_3 &= 2 \left(\cos \frac{-5\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{-5\pi}{16} \right). \end{aligned}$$



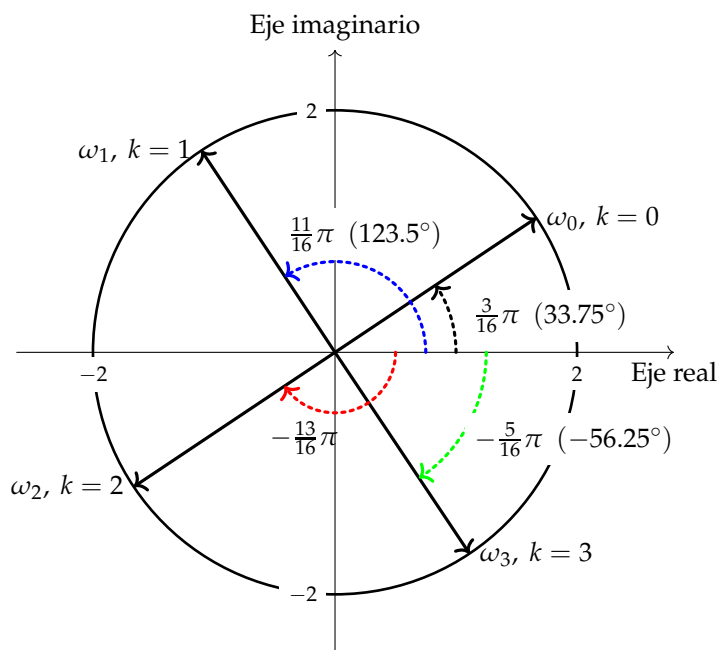


Figura 3.12: Las cuatro raíces cuartas del número $-8\sqrt{2} + 8\sqrt{2}i$.

Actividad de Aprendizaje 3.8.9

- 1) (S) Determina las raíces cúbicas de la unidad. ¿Qué figura geométrica forman estas raíces en el plano complejo?
- 2) (S) Determina las raíces cuadradas y las raíces cúbicas de $1 + i$.
- 3) (S) Determina las raíces cúbicas del número $-2 - 2i\sqrt{3}$.
- 4) (S) Determina las raíces sextas de la unidad. ¿Qué relación encuentras entre las raíces cúbicas de la unidad y las raíces sextas de la unidad?
- 5) (S) Si ω es una raíz n -ésima de la unidad, determina el valor de $\omega \cdot \bar{\omega}$. ¿Qué puedes concluir?
- 6) (S) ¿Para qué valores de n es -1 una n -ésima raíz de la unidad?
- 7) (S) ¿Cuántas 17-ésimas raíces de 1 están en el segundo cuadrante?
- 8) (S) Resuelve la ecuación $z^5 - 32 = 0$ en los números complejos.
- 9) (S) Resuelve la ecuación $z^4 + 1 = 0$ en los números complejos.

Actividad de Aprendizaje 3.8.9 (Continuación)

- 10) (SA) Una raíz n -ésima de la unidad se llama *primitiva* si n es el menor entero positivo tal que $\omega^n = 1$. Determina las raíces cúbicas primitivas de la unidad y las raíces sextas primitivas de la unidad.
- 11) (SA) Si $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ son las raíces n -ésimas de la unidad, explica por qué cada una de ellas es una potencia de ω_1 .
- 12) (SA) Sea $\omega \neq 1$ una raíz séptima de la unidad. Si $a = \omega + \omega^2 + \omega^4$ y $b = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$, determina los valores de $a^2 + a + 2$ y de $b^2 + b + 2$.
- 13) (SS) Resuelve la ecuación $z^6 - z^3(1+i) + i = 0$ en los complejos.
- 14) (SS) Resuelve la ecuación $z^{10} + (-2+i)z^5 - 2i = 0$ en los complejos.
- 15) (SS) ¿Cuántas soluciones complejas tiene la ecuación $z^{1000} = \bar{z}$?
- 16) (SS) Sean z_1, z_2, z_3 y z_4 , las soluciones de la ecuación $\left(\frac{z-i}{2z-i}\right)^4 = 1$. Determina el valor del producto $(z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1)$.
- 17) (SS) Si ω es una raíz cúbica de la unidad y ω no es un número real, determina el valor de la suma

$$\frac{a + b\omega + c\omega^2}{b + c\omega + a\omega^2} + \frac{a + b\omega + c\omega^2}{c + a\omega + b\omega^2},$$

donde a, b y c son números reales.

CAPÍTULO 4

SISTEMAS CUADRÁTICOS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

En Matemáticas, las ecuaciones cuadráticas son una parte fundamental del Álgebra. En el Capítulo 2, estudiamos la ecuación cuadrática en una incógnita $ax^2 + bx + c = 0$. En este capítulo exploraremos cómo resolver sistemas de dos ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas. Las ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas definen cónicas como parábolas, elipses e hipérbolas. Su estudio permite modelar fenómenos físicos y comprender la dinámica de sistemas en Física, Ingeniería y Medicina. El discriminante de la ecuación es clave para clasificar estas curvas y predecir su comportamiento sin necesidad de graficarlas, facilitando así el análisis y la resolución de problemas en contextos aplicados.

Resolver sistemas de ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas puede parecer desafiante al principio, pero con la práctica y el uso de métodos adecuados, podemos determinar las soluciones de manera efectiva.

Ecuación cuadrática con dos incógnitas (4.0.1)

La **forma general de una ecuación cuadrática o de segundo grado con dos incógnitas** x, y , cuyos coeficientes son números reales es

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad (4.1)$$

donde al menos uno de los números a, b o c es distinto de cero. Las gráficas de estas ecuaciones son secciones cónicas: circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas. A la ecuación (4.1) también se le conoce como **ecuación general de las cónicas**.

Ejemplo 4.0.2

Las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5xy &= 2, \\ x^2 - xy + y^2 + 2x + 3y &= 0, \\ y^2 &= 4x, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 &= 4, \\ xy &= 4, \end{aligned}$$

son ecuaciones cuadráticas en x, y .

Discriminante de la ecuación general de segundo grado (4.0.3)

El discriminante de la ecuación (4.1) es el número $\Delta = b^2 - 4ac$. El discriminante se utiliza para determinar el tipo de cónica que representa la ecuación.

- 1) Si $\Delta < 0$ y $a = c$, la ecuación (4.1) es una circunferencia.
- 2) Si $\Delta < 0$ y $a \neq c$, la ecuación (4.1) es una elipse.
- 3) Si $\Delta = 0$, la ecuación (4.1) es una parábola.

4) Si $\Delta > 0$, la ecuación (4.1) es una hipérbola.

Ejemplo 4.0.4

Consideremos las ecuaciones cuadráticas del Ejemplo 4.0.2.

El discriminante de la primera ecuación es $5^2 - 4(3)(0) = 25 > 0$, por lo que su gráfica es una hipérbola.

El discriminante de la segunda ecuación es $(-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$ y $a = c = 1$, por lo que su gráfica es una circunferencia.

El discriminante de la tercera ecuación es $0^2 - 4(0)(1) = 0$, por lo que su gráfica es una parábola.

El discriminante de la cuarta ecuación es $2^2 - 4(1)(3) = -8 < 0$ y $a = 1 \neq 3 = c$, por lo que su gráfica es una elipse.

El discriminante de la quinta ecuación es $1^2 - 4(0)(0) = 1$, por lo que su gráfica es una hipérbola.

Sistema cuadrático de dos ecuaciones con dos incógnitas (4.0.5)

Un **sistema cuadrático** de dos ecuaciones con dos incógnitas, es un sistema de dos ecuaciones donde cada ecuación tiene grado a lo más 2 y al menos una ecuación es de grado 2.

A continuación veremos cómo resolver ciertos tipos de sistemas cuadráticos de dos ecuaciones con dos incógnitas.

4.1. Sistema lineal-cuadrático

De los distintos tipos de sistemas de ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas, el más sencillo es el que contiene una ecuación lineal y una ecuación cuadrática. Este tipo de sistemas recibe el nombre de sistema lineal-cuadrático. Su resolución se basa en el siguiente resultado.

Resolución de un sistema lineal-cuadrático de dos ecuaciones con dos incógnitas (4.1.1)

Un **sistema lineal-cuadrático** de dos ecuaciones con dos incógnitas es de la forma

$$\begin{cases} rx + sy = t, \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \end{cases}$$

donde r y s no son ambos cero, así como a , b y c no son todos cero.

Para resolver este tipo de sistemas, se utiliza el método de sustitución. Esto es, se despeja de la ecuación lineal alguna de las variables y el resultado se sustituye en la ecuación cuadrática, obteniendo así una ecuación cuadrática con una sola incógnita. Las soluciones de esta ecuación cuadrática con una incógnita se sustituyen después en la ecuación lineal para obtener los valores de la otra incógnita.

Ejemplo 4.1.2

Resolver el sistema lineal-cuadrático

$$\begin{aligned} x + y &= 7, \\ x^2 + y^2 &= 25. \end{aligned}$$

Solución. Si despejamos y de la ecuación lineal, tenemos que $y = 7 - x$. Sustituyendo en la ecuación cuadrática, obtenemos la ecuación cuadrática con una sola incógnita $x^2 + (7 - x)^2 = 25$, esto es, $x^2 - 7x + 12 = 0$. Factorizando, obtenemos que $(x - 3)(x - 4) = 0$, de donde $x = 3$ o $x = 4$.

Si $x = 3$, entonces $y = 7 - 3 = 4$; si $x = 4$, entonces $y = 7 - 4 = 3$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son las parejas $(3, 4)$ y $(4, 3)$.

Geométricamente, esto significa que la recta $x + y = 7$ interseca a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en dos puntos. ■

Ejemplo 4.1.3

Resolver el sistema lineal-cuadrático

$$\begin{aligned}x + 2y &= 4, \\ y^2 - xy &= 7.\end{aligned}$$

Solución. Si despejamos x de la ecuación lineal, obtenemos que $x = 4 - 2y$. Sustituyendo en la ecuación cuadrática, resulta que $y^2 - (4 - 2y)y = 7$, esto es, $3y^2 - 4y - 7 = 0$. Factorizando, obtenemos que $(3y - 7)(y + 1) = 0$, de donde $y = \frac{7}{3}$ o $y = -1$. Si $y = \frac{7}{3}$, entonces $x = 4 - 2(\frac{7}{3}) = -\frac{2}{3}$; si $y = -1$, entonces $x = 4 - 2(-1) = 6$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son las parejas $(x, y) = (-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}), (6, -1)$.

Geométricamente, esto significa que la recta $x + 2y = 4$ interseca a la hipérbola $y^2 - xy = 7$ en dos puntos. ■

Ejemplo 4.1.4

Resolver el sistema lineal-cuadrático

$$\begin{aligned}3x - 1 + 2y &= 0, \\ 3x^2 - y^2 + 4 &= 0.\end{aligned}$$

Solución. Despejando y de la ecuación lineal, obtenemos que $y = \frac{1}{2}(1 - 3x)$. Sustituyendo en la ecuación cuadrática, resulta que $3x^2 - [\frac{1}{2}(1 - 3x)]^2 + 4 = 0$, esto es, $x^2 + 2x + 5 = 0$. Usando la fórmula general, obtenemos las soluciones

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(5)}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Si $x = -1 + 2i$, entonces $y = \frac{1}{2}(1 - 3x) = \frac{1}{2}[1 - 3(-1 + 2i)] = \frac{1}{2}(4 - 6i) = 2 - 3i$. Si $x = -1 - 2i$, entonces $y = \frac{1}{2}(1 - 3x) = \frac{1}{2}[1 - 3(-1 - 2i)] = \frac{1}{2}(4 + 6i) = 2 + 3i$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son las parejas $(x, y) = (-1 + 2i, 2 - 3i), (-1 - 2i, 2 + 3i)$.

Geométricamente, la recta $3x - 1 + 2y = 0$ y la hipérbola $3x^2 - y^2 + 4 = 0$ no se intersecan. ■

Ejemplo 4.1.5

Determinar los valores de a tales que la recta $ax + y = -1$ y la parábola $y = ax^2 + x + 1$ no tengan puntos de intersección.

Solución. Vamos a determinar los valores de a donde sí tengan puntos de intersección las gráficas de las ecuaciones dadas. Despejando y de la ecuación lineal, tenemos que $y = -1 - ax$. Sustituyendo en la ecuación cuadrática, obtenemos que $-1 - ax = ax^2 + x + 1$, esto es, $ax^2 + (a + 1)x + 2 = 0$. Esta ecuación tiene soluciones reales si y solo si su discriminante es mayor o igual que 0, esto es, $(a + 1)^2 - 8a = a^2 - 6a + 1 \geq 0$. Las soluciones de la ecuación $a^2 - 6a + 1 = 0$ son

$$a = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2},$$

por lo que debemos resolver la desigualdad $(a - 3 - 2\sqrt{2})(a - 3 + 2\sqrt{2}) \geq 0$. Como un producto de dos números es no negativo si ambos son mayores o iguales que cero o ambos son menores o iguales que cero, es fácil ver que las soluciones de la desigualdad anterior son los números a que son mayores o iguales que $3 + 2\sqrt{2}$ junto con los números a que son menores o iguales que $3 - 2\sqrt{2}$.

Por lo tanto, si $a \geq 3 + 2\sqrt{2}$ o $a \leq 3 - 2\sqrt{2}$, la recta $ax + y = -1$ y la parábola $y = ax^2 + x + 1$ se intersecan en al menos un punto. Esto significa que no se intersecan si a es cualquier número real del intervalo abierto $(3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$.

**Actividad de Aprendizaje 4.1.6**

- 1) (S) Determina la ecuación de la cónica formada por los puntos del plano cuyas distancias a los puntos $(1, 0)$ y $(0, 2)$ suman 3.
- 2) (S) Determina la ecuación de la cónica formada por los puntos del plano cuya distancia al punto $(1, 1)$ es igual a su distancia a la recta $x + y = 0$.
- 3) (S) Determina los puntos de intersección de cada par de ecuaciones y el tipo de cónica en cada caso.
 - a) $x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0$, $x + y + 8 = 0$.
 - b) $x - y = 1$, $x^2 + y^2 = 41$.
 - c) $y - x = 2$, $x^2 + xy = 3$.
 - d) $2x^2 - 8y^2 = 18$, $3x + 4y = 7$.
 - e) $y = 9x^2 + 11x + 3$, $5x - y = -2$.
 - f) $2x - 3y - 10 = 0$, $x^2 + xy + y^2 + 2x + y - 6 = 0$.

Actividad de Aprendizaje 4.1.6 (Continuación)

- g) $xy = 12, x - y = 1$.
- h) $x^2 + 4y^2 = 37, x - y = -4$.
- i) $y^2 = -x + 3, x - y = 1$.
- j) $x + ay = 1, ax^2 + xy + ay^2 = a$, donde a es un número real distinto de cero.
- 4) (S) Considera el sistema de ecuaciones $y = x^2 - 3x - 4, 6x - 2y = 26$. Sabiendo que el par $(x, y) = (3, -4)$ es la única solución de este sistema, describe las gráficas de cada ecuación y determina el número de puntos de intersección.
- 5) (SA) La suma de los cuadrados de dos números es 89 y la diferencia de los números es 3. Determina los dos números.
- 6) (SA) Un número es 3 menos que el cuadrado de otro número. Si la suma de los dos números es 9, determina los números.
- 7) (SA) La suma de los recíprocos de dos números es igual a 2 y la diferencia de los números es igual a 3. Determina los números.
- 8) (SS) Supongamos que la recta $ax + by + c = 0$ interseca a la hipérbola $xy = 1$ en los puntos D y E (con $D \neq E$). Determina las coordenadas del punto medio del segmento DE .
- 9) (SS) Determina todos los números reales a tales que la gráfica de la recta $x - y = a$ y la gráfica de la parábola $y = x^2 + x + a$ tengan exactamente un punto de intersección. Para los valores de a encontrados, determina el único punto de intersección de ambas gráficas.
- 10) (SS) Determina todos los números reales a tales que la gráfica de la recta $ax + y = 0$ y la gráfica de la hipérbola $x^2 - xy - y^2 = a$ tengan al menos un punto de intersección.
- 11) (SS) Determina todos los números reales a tales que la gráfica de la recta $ax - ay = 1$ y la gráfica de la hipérbola $x^2 - axy - y^2 = 0$ no tengan puntos de intersección.

4.2. Sistemas cuadráticos de la forma $ax^2 + by^2 = c$

En esta sección estudiaremos a los sistemas de dos ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + by^2 = c$.

Resolución de un sistema cuadrático de dos ecuaciones de la forma $ax^2 + by^2 = c$

(4.2.1)

Consideremos el siguiente sistema de dos ecuaciones cuadráticas

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 = c_1, \\ a_2x^2 + b_2y^2 = c_2. \end{cases}$$

Supongamos que $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$. Multiplicando la primera ecuación por a_2 y la segunda por $-a_1$, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} a_1a_2x^2 + a_2b_1y^2 &= a_2c_1, \\ -a_1a_2x^2 - a_1b_2y^2 &= -a_1c_2. \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones, eliminamos la incógnita x . De esta manera, obtenemos la ecuación cuadrática en y

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y^2 = a_2c_1 - a_1c_2.$$

Resolvemos esta ecuación cuadrática y cada solución encontrada para y la sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema inicial, para determinar los respectivos valores de x .

El caso en que $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$ es análogo. En este caso, multiplicamos la primera ecuación por b_2 y la segunda por $-b_1$. Luego sumamos las dos ecuaciones obtenidas, eliminando así la incógnita y . Resolvemos la ecuación cuadrática en x y las soluciones las sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema inicial para determinar los respectivos valores de y .

Ejemplo 4.2.2

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x^2 - y^2 &= 7, \\ 3x^2 + 2y^2 &= 14. \end{aligned}$$

Solución. Si queremos eliminar la incógnita y , multiplicamos la primera ecuación por 2 y sumamos la ecuación resultante a la segunda ecuación. El resultado es la

ecuación $7x^2 = 28$, de donde $x^2 = 4$ y $x = \pm 2$.

Si $x = 2$, de la primera ecuación obtenemos que $y^2 = 2x^2 - 7 = 2(2^2) - 7 = 1$, de donde $y = \pm 1$.

Si $x = -2$, de la primera ecuación obtenemos que $y^2 = 2x^2 - 7 = 2(-2)^2 - 7 = 1$, de donde $y = \pm 1$.

Por lo tanto, las soluciones del sistema son las parejas $(x, y) = (2, 1), (-2, 1), (2, -1), (-2, -1)$. ■

Ejemplo 4.2.3

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x^2 - y^2 &= 5, \\ 3x^2 + 4y^2 &= 57. \end{aligned}$$

Solución. Observando las ecuaciones del sistema, notamos que los coeficientes de y^2 tienen signos opuestos, por lo que basta multiplicar la primera ecuación por 4 y sumar la ecuación obtenida con la segunda ecuación del sistema para eliminar la variable y . El resultado es $11x^2 = 77$, de donde $x^2 = 7$. Sustituyendo en la primera ecuación del sistema obtenemos que $14 - y^2 = 5$, esto es, $y^2 = 9$. Luego, $x = \pm\sqrt{7}$, $y = \pm 3$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son las parejas $(x, y) = (-\sqrt{7}, 3), (-\sqrt{7}, -3), (\sqrt{7}, -3), (\sqrt{7}, 3)$. ■

Ejemplo 4.2.4

Determinar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} &= \frac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 &= 20. \end{aligned}$$

Solución. A simple vista, la primera ecuación no tiene la forma $ax^2 + by^2 = c$. Realizando la suma de las fracciones obtenemos la ecuación

$$\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{x^2 - y^2} = \frac{5}{2}.$$

Simplificando, obtenemos la ecuación $x^2 - 9y^2 = 0$, la cual tiene la forma requeri-

da. Por lo tanto, el sistema inicial se puede reescribir como

$$\begin{aligned}x^2 - 9y^2 &= 0, \\x^2 + y^2 &= 20.\end{aligned}$$

Para eliminar la variable x , multiplicamos la segunda ecuación por -1 y la ecuación resultante la sumamos a la primera ecuación. El resultado es la ecuación $-10y^2 = -20$, esto es, $y^2 = 2$, de donde obtenemos que $y = \pm\sqrt{2}$. Finalmente, de la segunda ecuación, tenemos que $x^2 = 20 - y^2 = 20 - 2 = 18$, de donde se sigue que $x = \pm 3\sqrt{2}$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son las parejas $(x, y) = (3\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-3\sqrt{2}, \sqrt{2}), (3\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. ■

Ejemplo 4.2.5

Determinar los puntos de intersección de las circunferencias cuyas ecuaciones son $3x^2 + 3y^2 = 2$ y $2x^2 + 2y^2 = 3$.

Solución. Multiplicando la primera ecuación por 2, la segunda ecuación por -3 y sumando las ecuaciones obtenidas, obtenemos la igualdad $0 = -5$, que claramente es falsa. Esto significa que el sistema de ecuaciones no tiene soluciones y, por lo tanto, las circunferencias no se intersecan. ■

Ejemplo 4.2.6

La suma de los cuadrados de dos números es 34 y la diferencia de sus cuadrados es 16. Determinar los números.

Solución. Sean x, y los dos números. Supongamos que el mayor es x . La suma de sus cuadrados es $x^2 + y^2$ y la diferencia (positiva) de sus cuadrados es $x^2 - y^2$. Entonces, el sistema de ecuaciones que describe la situación es

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 34, \\x^2 - y^2 &= 16.\end{aligned}$$

Podemos eliminar la variable y simplemente sumando las dos ecuaciones. El resultado es $2x^2 = 50$, esto es, $x^2 = 25$, de donde $x = \pm 5$.

Si $x = 5$, entonces $y^2 = 34 - x^2 = 9$ y, por lo tanto, $y = \pm 3$.

Si $x = -5$, entonces $y^2 = 34 - x^2 = 9$ y, por lo tanto, $y = \pm 3$.

Por lo tanto, las cuatro parejas de números que satisfacen el problema son $(5, 3), (-5, 3), (5, -3)$ y $(-5, -3)$. ■

Actividad de Aprendizaje 4.2.7

- 1) (S) Determina las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones.
 - a) $x^2 + 4y^2 = 25, x^2 - y^2 = 5$.
 - b) $2x^2 - y^2 = 3, x^2 + y^2 = 1$.
 - c) $4x^2 - 9y^2 = 36, 4x^2 + 9y^2 = 36$.
 - d) $4x^2 + 25y^2 = 100, 4x^2 - 25y^2 = 100$.
 - e) $16x^2 - 4y^2 = 64, x^2 + y^2 = 9$.
 - f) $x^2 - y^2 = 4, 2x^2 + y^2 = 5$.
 - g) $x^2 + y^2 = 25, x^2 - y^2 = 25$.
 - h) $2x^2 + y^2 = 19, 3x^2 - y^2 = 6$.
 - i) $3x^2 - 2y^2 = 26, x^2 - y^2 = 5$.
 - j) $\frac{4}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 3, (x+y)^2 + (x-y)^2 = 20$.
 - 2) (S) A continuación se proporcionan dos sistemas cuadráticos y sus soluciones. Describe las gráficas de cada sistema y determina el número de puntos de intersección.
 - a) $x^2 + 4y^2 = 16, x^2 + y^2 = 4$. Soluciones: $(x, y) = (0, 2)$ y $(0, -2)$.
 - b) $2x^2 + y^2 = 4, x^2 - 2y^2 = 12$. El sistema no tiene soluciones.
 - 3) (SA) La diferencia de los cuadrados de dos números es 35 y la suma de sus cuadrados es 37. Determina los números.
 - 4) (SA) El cuadrado de un número es 2 menos que el doble del cuadrado de otro número. Si la suma de los cuadrados de los dos números es 25, determina los números.
 - 5) (SS) Determina todos los números reales a tales que el sistema de ecuaciones $ax^2 + y^2 = 1, x^2 + ay^2 = 1$:
 - a) Tenga una infinidad de soluciones en los números reales.
 - b) No tenga soluciones.
 - c) Tenga exactamente 4 parejas de soluciones en los números reales.
-

4.3. Sistemas cuadráticos de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 = d$

Resolución de un sistema cuadrático de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ (4.3.1)

Consideremos el siguiente sistema de dos ecuaciones cuadráticas

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2. \end{cases}$$

1. Si $d_1 \neq 0$ y $d_2 \neq 0$, la estrategia de resolución consiste en eliminar los términos constantes d_1 y d_2 de cada ecuación, utilizando el método de eliminación o método de la suma, el cual consiste en multiplicar la primera ecuación por d_2 (o por $-d_2$), la segunda por $-d_1$ (o por d_1) y sumar las ecuaciones obtenidas. La ecuación resultante se resuelve como una ecuación cuadrática en x o en y .

2. Si $d_1 = d_2 = 0$, la estrategia de resolución consiste en generar una nueva ecuación a partir de las dos ecuaciones del sistema (ya sea sumándolas o restándolas), que se pueda resolver como una ecuación cuadrática en x o en y .

3. Si $d_1 = 0$ o $d_2 = 0$ pero no son ambos iguales a cero, la estrategia de resolución consiste en eliminar términos no constantes utilizando el método de eliminación, para generar ecuaciones con términos constantes distintos de cero y luego proceder como en el caso 1.

Ejemplo 4.3.2

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= 6, \\ x^2 + 5xy - 4y^2 &= 10. \end{aligned}$$

Solución. Multiplicando la primera ecuación por 5 y la segunda por -3 , obtenemos las ecuaciones $5x^2 + 5xy = 30$ y $-3x^2 - 15xy + 12y^2 = -30$. Sumando estas ecuaciones, obtenemos la ecuación cuadrática $2x^2 - 10xy + 12y^2 = 0$, esto es, $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$. Factorizando, obtenemos que $(x - 2y)(x - 3y) = 0$, de

donde $x = 2y$ o $x = 3y$.

Si $x = 2y$, de la primera ecuación del sistema obtenemos que $4y^2 + 2y^2 = 6$, esto es, $6y^2 = 6$ de donde $y = \pm 1$ y, por lo tanto, $x = \pm 2$. Luego, en este caso tenemos las soluciones $(x, y) = (2, 1)$ y $(-2, -1)$.

Si $x = 3y$, de la primera ecuación del sistema obtenemos que $9y^2 + 3y^2 = 6$, esto es, $12y^2 = 6$, de donde $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ y, por lo tanto, $x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Luego, en este caso tenemos las soluciones $(x, y) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ■

Ejemplo 4.3.3

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x^2 + 3xy + 2y^2 &= 3, \\x^2 + 5xy + 6y^2 &= 15.\end{aligned}$$

Solución. Multiplicando la primera ecuación por 5 y la segunda por -1 , obtenemos las ecuaciones $5x^2 + 15xy + 10y^2 = 15$ y $-x^2 - 5xy - 6y^2 = -15$. Sumando estas ecuaciones, obtenemos que $4x^2 + 10xy + 4y^2 = 0$, esto es, $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 0$. Factorizando, tenemos que $(2x + y)(x + 2y) = 0$, de donde $y = -2x$ o $x = -2y$. Si $y = -2x$, de la primera ecuación del sistema obtenemos que $x^2 - 6x^2 + 8x^2 = 3$, esto es, $3x^2 = 3$, de donde $x = \pm 1$ y, por lo tanto, $y = \mp 2$. Luego, en este caso tenemos las soluciones $(x, y) = (1, -2)$, $(-1, 2)$.

Si $x = -2y$, de la primera ecuación del sistema tenemos que $4y^2 - 6y^2 + 2y^2 = 3$, esto es, $0 = 3$, lo cual es un absurdo. Luego, en este caso no hay soluciones. ■

Ejemplo 4.3.4

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}3x^2 - 8xy + 4y^2 &= 0, \\5x^2 - 7xy - 6y^2 &= 0.\end{aligned}$$

Solución. Como los términos constantes son iguales a cero, no podemos aplicar el método de eliminación. Sumando las dos ecuaciones del sistema obtenemos la ecuación $8x^2 - 15xy - 2y^2 = 0$, esto es, $2y^2 + 15xy - 8x^2 = 0$. Resolviendo esta ecuación cuadrática en y , tenemos que

$$y = \frac{-15x \pm \sqrt{(15x)^2 - 4(2)(-8x^2)}}{4} = \frac{-15x \pm 17x}{4},$$

de donde $y = \frac{x}{2}$ o $y = -8x$.

Si $y = \frac{x}{2}$, entonces $x = 2y$. Sustituyendo en la primera ecuación del sistema obtenemos que $3(4y^2) - 16y^2 + 4y^2 = 0$, esto es, $0 = 0$. Luego, en este caso las soluciones son de la forma $(x, y) = (2y, y)$ donde y es cualquier número real.

Si $y = -8x$, sustituyendo en la primera ecuación del sistema obtenemos que $3x^2 + 64x^2 + 4(64x^2) = 0$, esto es, $323x^2 = 0$ de donde $x = 0$ y, por lo tanto, $y = 0$. Luego, en este caso la única solución del sistema es $(0, 0)$. ■

Actividad de Aprendizaje 4.3.5

- (S) Determina las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones.

- $x^2 - xy = 12, xy - y^2 = 3$.
- $6x^2 + xy - 2y^2 = 0, 3x^2 - xy - 2y^2 = 0$.
- $x^2 - xy + y^2 = 3, x^2 + 2xy - y^2 = 1$.
- $x^2 + xy + y^2 = 7, x^2 + y^2 = 10$.
- $x^2 + xy = 12, y^2 + 4xy = 48$.
- $56x^2 - xy - y^2 = 0, 14x^2 + 19xy - 3y^2 = 0$.
- $x^2 - 3xy + y^2 = -1, 3x^2 - xy + 3y^2 = -32$.
- $x^2 + xy + 4y^2 = 6, 3x^2 + 8y^2 = 14$.
- $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43$.

- (SA) Si a, b, c y d son números reales distintos de cero, determina las soluciones del sistema de ecuaciones

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d,$$

$$bx^2 + cxy + ay^2 = d.$$

- (SS) Determina las soluciones de cada sistema de ecuaciones.

- $4x^2 - 3xy - y^2 = 0, 32x^2 - 36xy + 9y^2 = 6$.
- $15x^2 + xy - 2y^2 = 0, 7x^2 - 4xy - 3y^2 = -32$.

(Sugerencia: Como no es posible eliminar de manera directa los términos constantes distintos de cero, usa el método de la suma para eliminar otros términos, generando así ecuaciones con términos constantes distintos de cero).

- (SS) Siguiendo la misma estrategia de eliminar los términos constantes, determina las soluciones en los números reales del siguiente sistema cúbico.

$$36x^2y - 27y^3 = 8,$$

$$4x^3 - 27xy^2 = 4.$$

4.4. Sistemas cuadráticos simétricos

Comenzamos esta sección con la definición de polinomio simétrico en dos variables.

Polinomio simétrico en dos variables (4.4.1)

Un polinomio en dos variables x, y es **simétrico** si al intercambiar y por x y x por y , el polinomio no cambia.

Los polinomios **simétricos elementales** en dos variables son $x + y$ y xy .

Todo polinomio simétrico en dos variables puede ser expresando en términos de los polinomios simétricos elementales.

Ejemplo 4.4.2

Los polinomios $x^2 + 3xy + y^2$, $x^2 + y^2 - 3xy + 4x + 4y$, $x^3 + y^3$, $x^4 + y^4$, son simétricos.

El siguiente ejemplo muestra algunos polinomios simétricos en dos variables expresados en función de los dos polinomios simétricos elementales $x + y$ y xy .

Ejemplo 4.4.3

Si $u = x + y$ y $v = xy$, entonces

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = u(u^2 - 3v) = u^3 - 3uv,$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2,$$

$$x^2 + xy + y^2 = (u^2 - 2v) + v = u^2 - v,$$

$$x^2 - xy + y^2 = (u^2 - 2v) - v = u^2 - 3v,$$

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = [(u^2 - 2v)^2 - 2v^2] + v^2 = (u^2 - 2v)^2 - v^2.$$

Resolución de un sistema cuadrático simétrico (4.4.4)

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x, y se llama **simétrico** si los polinomios involucrados en cada ecuación son polinomios simétricos. La estrategia para resolver un sistema cuadrático simétrico con dos incógnitas es la siguiente: Cada polinomio simétrico debe expresarse en términos de los dos polinomios simétricos elementales $u = x + y$ y $v = xy$. De esta forma, el sistema de ecuaciones se convertirá en un sistema lineal-cuadrático en las nuevas variables u y v . Después se resuelve este sistema lineal-cuadrático y, por cada solución encontrada (u, v) , se obtiene un sistema lineal-cuadrático en las variables x, y . Finalmente, se resuelve cada uno de estos sistemas y las soluciones encontradas son las soluciones del sistema inicial.

Ejemplo 4.4.5

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2x + 2y &= 32, \\x + y + 2xy &= 22.\end{aligned}$$

Solución. Observemos que los polinomios $x^2 + y^2 + 2x + 2y$ y $x + y + 2xy$ son simétricos, por lo que el sistema es simétrico. Luego, si $u = x + y$ y $v = xy$, obtenemos que

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2x + 2y &= (x + y)^2 - 2xy + 2(x + y) = u^2 - 2v + 2u, \\x + y + 2xy &= u + 2v.\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos el sistema lineal-cuadrático

$$u^2 - 2v + 2u = 32, \quad u + 2v = 22.$$

De la ecuación lineal, tenemos que $u = 22 - 2v$. Sustituyendo en la ecuación cuadrática, obtenemos que

$$(22 - 2v)^2 - 2v + 2(22 - 2v) = 32,$$

esto es, $2v^2 - 47v + 248 = 0$. Usando la fórmula general, obtenemos las soluciones

$$v = \frac{47 \pm \sqrt{47^2 - 4(2)(248)}}{4} = \frac{47 \pm 15}{4},$$

esto es, $v = \frac{31}{2}$ o $v = 8$.

Si $v = \frac{31}{2}$, entonces $u = -9$. Luego, en este caso tenemos el sistema lineal-cuadrático $x + y = -9$, $xy = \frac{31}{2}$. De la ecuación lineal, tenemos que $x = -9 - y$. Sustituyendo en la ecuación cuadrática, obtenemos que $(-9 - y)y = \frac{31}{2}$, esto es, $2y^2 + 18y + 31 = 0$. Usando la fórmula general, obtenemos que

$$y = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4(2)(31)}}{4} = \frac{-18 \pm 2\sqrt{19}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{19}}{2}$$

y, de aquí, $x = -9 - y = \frac{-9 \mp \sqrt{19}}{2}$. Luego, en este caso tenemos las soluciones $(x, y) = \left(\frac{-9 - \sqrt{19}}{2}, \frac{-9 + \sqrt{19}}{2}\right), \left(\frac{-9 + \sqrt{19}}{2}, \frac{-9 - \sqrt{19}}{2}\right)$.

Si $v = 8$, entonces $u = 6$. Luego, en este caso tenemos el sistema lineal-cuadrático $x + y = 6$, $xy = 8$. De la ecuación lineal, tenemos que $x = 6 - y$. Sustituyendo en la ecuación cuadrática, obtenemos que $(6 - y)y = 8$, esto es, $y^2 - 6y + 8 = 0$. Factorizando, tenemos que $(y - 4)(y - 2) = 0$ de donde $y = 4$ o $y = 2$. De aquí que $x = 2$ o $x = 4$, respectivamente. Por lo tanto, en este caso tenemos las soluciones $(x, y) = (2, 4), (4, 2)$. ■

Ejemplo 4.4.6

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 180, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Solución. La segunda ecuación se puede reescribir en la forma $4x + 4y - xy = 0$. Observemos ahora que los polinomios $x^2 + y^2$ y $4x + 4y - xy$ son simétricos, por lo que si $u = x + y$ y $v = xy$, entonces

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v, \\ 4x + 4y - xy &= 4(x + y) - xy = 4u - v.\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos el sistema lineal-cuadrático

$$u^2 - 2v = 180, \quad 4u - v = 0.$$

De la ecuación lineal, tenemos que $v = 4u$. Sustituyendo en la ecuación cuadrática, resulta que $u^2 - 2(4u) = 180$, esto es, $u^2 - 8u - 180 = 0$. Factorizando, obtenemos que $(u - 18)(u + 10) = 0$, de donde $u = 18$ o $u = -10$.

Si $u = 18$, entonces $v = 4(18) = 72$. Luego, en este caso tenemos el sistema lineal-cuadrático $x + y = 18$, $xy = 72$. De aquí, obtenemos la ecuación $y^2 - 18y + 72 = 0$,

esto es, $(y - 12)(y - 6) = 0$, de donde $y = 12$ o $y = 6$. Luego, $x = 18 - y = 6$ o 12 . Por lo tanto, en este caso tenemos las soluciones $(x, y) = (6, 12), (12, 6)$.

Si $u = -10$, entonces $v = 4(-10) = -40$. Luego, tenemos el sistema lineal-cuadrático $x + y = -10$, $xy = -40$, lo cual implica que $y^2 + 10y - 40 = 0$. Usando la fórmula general, tenemos que

$$y = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-40)}}{2} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{65}}{2} = -5 \pm \sqrt{65}.$$

Luego, $x = -10 - y = -5 \mp \sqrt{65}$. Por lo tanto, en este caso tenemos las soluciones $(x, y) = (-5 + \sqrt{65}, -5 - \sqrt{65}), (-5 - \sqrt{65}, -5 + \sqrt{65})$. ■

El siguiente ejemplo es un sistema simétrico en dos variables pero no es cuadrático. Sin embargo, podemos seguir la misma estrategia de resolución de un sistema cuadrático simétrico.

Ejemplo 4.4.7

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x^4 + x^2y^2 + y^4 &= 91, \\x^2 - xy + y^2 &= 7.\end{aligned}$$

Solución. Notemos primero que el sistema es simétrico ya que los polinomios $x^4 + x^2y^2 + y^4$ y $x^2 - xy + y^2$ son simétricos. Expresando a estos polinomios en términos de los polinomios simétricos elementales $u = x + y$ y $v = xy$ (ver Ejemplo 4.4.3), obtenemos que

$$\begin{aligned}x^4 + x^2y^2 + y^4 &= (u^2 - 2v)^2 - v^2, \\x^2 - xy + y^2 &= u^2 - 3v.\end{aligned}$$

Luego, tenemos el sistema cuadrático $(u^2 - 2v)^2 - v^2 = 91$, $u^2 - 3v = 7$. De la segunda ecuación, tenemos que $u^2 = 3v + 7$. Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos que $(3v + 7 - 2v)^2 - v^2 = 91$, esto es, $(v + 7)^2 - v^2 = 91$. Desarrollando y simplificando obtenemos que $14v - 42 = 0$, de donde, $v = 3$. Esto implica que $u^2 = 3v + 7 = 16$, por lo que $u = \pm 4$.

Si $u = 4$, tenemos el sistema lineal-cuadrático $x + y = 4$, $xy = 3$. Resolviendo este sistema, obtenemos las soluciones $(x, y) = (1, 3), (3, 1)$.

Si $u = -4$, tenemos el sistema lineal-cuadrático $x + y = -4$, $xy = 3$. Resolviendo este sistema, obtenemos las soluciones $(x, y) = (-3, -1), (-1, -3)$. ■

Actividad de Aprendizaje 4.4.8

- 1) (S) Expresa el polinomio simétrico $3x^2y - x^2y^2 + 3xy^2$ en términos de los polinomios simétricos elementales $u = x + y$ y $v = xy$.
- 2) (S) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.
 - a) $x + y = 5, x^2 - xy + y^2 = 7$.
 - b) $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43$.
 - c) $4(x + y) = 3xy, x + y + x^2 + y^2 = 26$.
 - d) $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 18, x + y = 12$.
 - e) $xy(x + y) = 20, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}$.
 - f) $x^2 + y^2 = 34, x + y + xy = 23$.
 - g) $x + y + x^2 + y^2 = 18, xy + x^2 + y^2 = 19$.
 - h) $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43$.
 - i) $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$.
 - j) $x - y = 2, x^3 - y^3 = 8$.
- 3) (SA) Determina todas las soluciones reales o complejas del sistema de ecuaciones $x = (1 + y)^2, y = (1 + x)^2$.
- 4) (SA) Un polinomio en tres variables x, y, z se llama simétrico si al intercambiar cualesquiera dos de sus variables, el polinomio no cambia. Los polinomios simétricos elementales en tres variables x, y, z son $u = x + y + z, v = xy + yz + xz$ y $w = xyz$. Expresa los siguientes polinomios simétricos en términos de los polinomios simétricos elementales u, v y w .
 - a) $x^2 + y^2 + z^2$.
 - b) $x^3 + y^3 + z^3$.
 - c) $(x + y)(y + z)(x + z)$.
- 5) (SS) Expresa el polinomio simétrico $x^5 + y^5$ en términos de los polinomios simétricos elementales $u = x + y$ y $v = xy$.
- 6) (SS) Determina las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones.
 - a) $x^3 + y^3 = 19, (xy + 8)(x + y) = 2$.
 - b) $x + y = a, x^3 + y^3 = b(x^2 + y^2)$.

Actividad de Aprendizaje 4.4.8 (Continuación)

- c) $x^4 - x^2y^2 + y^4 = 1153, x^2 - xy + y^2 = 33$.
- d) $x^3y + xy^3 = \frac{10}{9}(x+y)^2, x^4y + xy^4 = \frac{2}{3}(x+y)^3$.
- e) $\frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{31}{7}, x^2 + xy + y^2 = 3$.
- 7) (SS) El objetivo de este ejercicio es determinar todas las soluciones del siguiente sistema cúbico de tres ecuaciones.

$$x^3 = 2y - 1,$$

$$y^3 = 2z - 1,$$

$$z^3 = 2x - 1.$$

- a) Obtén una ecuación simétrica en x, y, z de la forma $A + B + C = 0$, donde A es un polinomio cúbico en x , B es un polinomio cúbico en y y C es un polinomio cúbico en z . (Ver el Ejercicio 4 para la definición de polinomio simétrico en tres variables).
- b) Suponiendo que $x \leq y \leq z$, deduce que $x = y = z$.
- c) Utilizando el inciso b), resuelve la ecuación $A + B + C = 0$ obtenida en el inciso a).
- d) Explica por qué las soluciones obtenidas en el inciso c) son las soluciones del sistema original.
-

CAPÍTULO 5

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Muchas de las expresiones con las que hemos trabajado hasta ahora, han sido polinomios o han estado estrechamente relacionadas con polinomios. En este capítulo exploraremos otro tipo de expresiones algebraicas: Las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas. Muchas situaciones en nuestro mundo presentan crecimiento o decrecimiento que se puede representar mediante una función o modelo exponencial. Ejemplo de esto es el crecimiento natural de bacterias en una colonia, el crecimiento poblacional, la descomposición química, la presión atmosférica y las concentraciones de droga y de alcohol en la sangre, entre otros. Las funciones exponenciales se usan también en estadística para determinar probabilidades. Entre las funciones exponenciales más usadas está la función exponencial con base e , conocida como función exponencial natural.

Los logaritmos son importantes porque nos permiten resolver ecuaciones exponenciales. También hay fórmulas importantes definidas en términos de logaritmos. Ejemplo de esto es la fórmula usada en la escala de Richter, la cual se utiliza para medir la magnitud e intensidad de un terremoto. El logaritmo en esta fórmula tiene base 10 (logaritmo común).

5.1. Funciones y ecuaciones exponenciales

En la expresión 2^4 , el número 4 es llamado **exponente** y el número 2 es llamado **base**. Una función de la forma $f(x) = a^x$, donde a es una constante positiva diferente de 1, es llamada **función exponencial** con base a .

Observación 5.1.1

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $a^x > 0$ para cualquier número real x . Esto lo podemos ver analizando tres casos por separado.

- 1) Si $x > 0$, entonces $a^x > 0$, ya que $a > 0$.
- 2) Si $x = 0$, entonces $a^x = a^0 = 1 > 0$.
- 3) Si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y $a^x = \frac{1}{a^{-x}} > 0$, ya que $1 > 0$ y $a^{-x} > 0$ por el caso 1).

Esto significa que la gráfica de cualquier función exponencial, siempre se dibuja por arriba del eje de las x .

Ejemplo 5.1.2

Si $f(x) = 2^x$, en la siguiente tabla podemos observar que cuando x toma valores cada vez mayores, los valores de $f(x)$ también se hacen más grandes.

x	-2	0	2	5	8
$f(x)$	0.25	1	4	32	256

Ejemplo 5.1.3

Si $g(x) = (\frac{1}{2})^x$, en la siguiente tabla podemos observar que cuando x toma valores cada vez mayores, los valores de $g(x)$ disminuyen.

x	-2	0	2	5	8
$g(x)$	4	1	0.25	0.03125	0.00390625

Lo que ilustran los Ejemplos 5.1.2 y 5.1.3 sucede en general, como se describe a continuación.

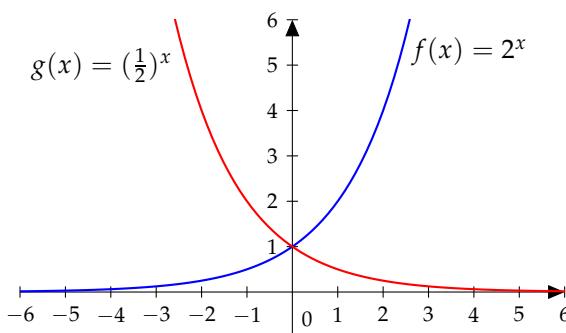
Comportamiento de la función exponencial a^x (5.1.4)

Sea $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$.

- 1) Si $a > 1$, entonces $f(x)$ crece cuando x crece, esto es, $f(x) > f(y)$ siempre que $x > y$.
- 2) Si $0 < a < 1$, entonces $f(x)$ disminuye cuando x aumenta, esto es, $f(x) < f(y)$ siempre que $x > y$.

Ejemplo 5.1.5

A continuación mostramos en el mismo plano cartesiano las gráficas de las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Observemos que la gráfica de la función 2^x es la gráfica de la función $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ reflejada sobre el eje y . En otras palabras, para cada punto (a, b) en la gráfica de $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, hay un punto $(-a, b)$ en la gráfica de 2^x y viceversa. Para ver por qué esto es así, notemos que

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = f(-x).$$

Así, para cada punto $(a, g(a))$ en la gráfica de la función g , hay un punto $(-a, f(-a))$ en la gráfica de la función f (y viceversa) con la misma ordenada pero con abscisa opuesta.

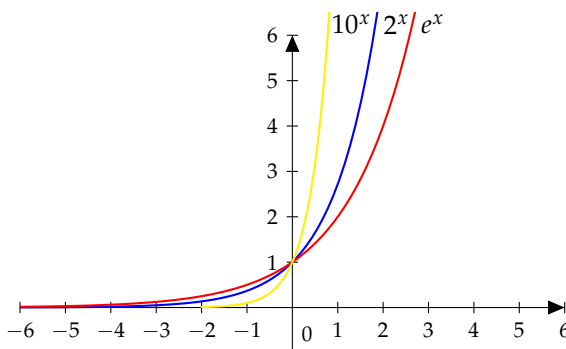
Cuando x es negativo, el valor de 2^x aumenta muy lentamente cuando x aumenta. Sin embargo, cuando x es positivo, alcanzamos un punto donde

el valor de 2^x se dispara cuando x aumenta. Cada función exponencial a^x con $a > 1$ tiene este comportamiento.

Por otro lado, si $0 < a < 1$, tenemos el comportamiento representado por la gráfica de $g(x) = (\frac{1}{2})^x$. En este caso, cuando x aumenta el valor de a^x disminuye. Cuando x es muy grande, el valor de a^x es muy cercano a 0, pero nunca es igual a 0.

Ejemplo 5.1.6 La función e^x

Un ejemplo importante de función exponencial es la función $f(x) = e^x$, donde e es el número de Euler. Este número e aproximadamente es igual a 2.7182. A continuación mostramos la gráfica de esta función, junto con las gráficas de las funciones 2^x y 10^x . Observemos que el comportamiento de las tres funciones es análogo, ya que la base de cada función exponencial (e , 2 y 10) es un número mayor que 1. De acuerdo con (5.1.4), los valores de cada una de las tres funciones crecen conforme x crece en toda la recta real.



El número e es una constante muy especial, como el número π , el cual tiene muchos usos en Matemáticas y en la Ciencia en general. Las funciones exponenciales que involucran al número e son frecuentemente utilizadas para describir procesos naturales.

Observación 5.1.7

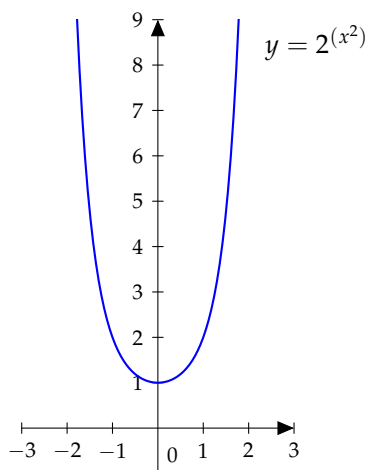
Una función exponencial más general que la función a^x , es la función $a^{f(x)}$ donde $f(x)$ es otra función en la variable x . En particular, en el caso cuando

$f(x) = x$, obtenemos la función a^x .

El comportamiento de la función exponencial general $a^{f(x)}$ depende del comportamiento de la función $f(x)$, por lo que es más sofisticado que el comportamiento de la función exponencial a^x .

Ejemplo 5.1.8

Las funciones 2^{2x-1} y $2^{(x^2)}$ son funciones exponenciales. La gráfica de la función $2^{(x^2)}$ se muestra a continuación. Observemos que cuando x es negativo, $2^{(x^2)}$ disminuye cuando x crece, mientras que cuando x es positivo, $2^{(x^2)}$ aumenta cuando x crece. Compara este comportamiento con el de la función 2^x del Ejemplo 5.1.5.



Una ecuación de la forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ donde a es un número real positivo distinto de 1 y $f(x)$, $g(x)$ son funciones en la variable x , se llama **ecuación exponencial**.

El siguiente hecho puede ser usado para resolver ecuaciones exponenciales.

Propiedad de igualdad para ecuaciones exponenciales (5.1.9)

Sea a un número real positivo distinto de 1 y sean $f(x)$, $g(x)$ funciones en la variable x . Entonces, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ si y solamente si $f(x) = g(x)$.

Ejemplo 5.1.10

Determinar las soluciones reales de la ecuación $2^{x^2-2x} = 2^{3x-6}$.

Solución. La ecuación tiene la forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, donde $f(x) = 2x^2 - 2x$ y $g(x) = 3x - 6$. Aplicando la Propiedad (5.1.9), tenemos que $x^2 - 2x = 3x - 6$, esto es, $x^2 - 5x + 6 = 0$. Factorizando, obtenemos que $(x - 2)(x - 3) = 0$, cuyas soluciones son $x = 2$ y $x = 3$. ■

Ejemplo 5.1.11

Determinar las soluciones reales de la ecuación $e^x - e^{-x} = 0$.

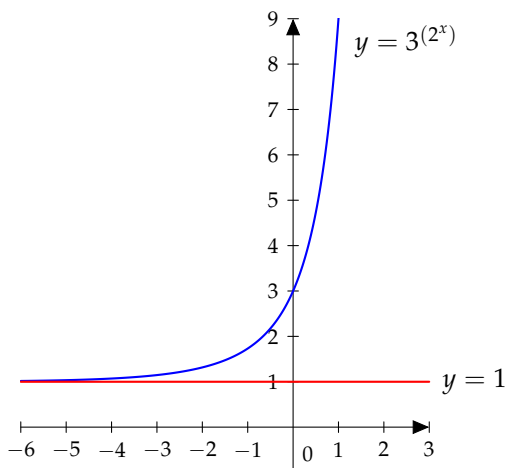
Solución. La ecuación la podemos reescribir en la forma $e^x = e^{-x}$. Aplicando la Propiedad (5.1.9) con $f(x) = x$ y $g(x) = -x$, obtenemos que $x = -x$, esto es, $2x = 0$ y, por lo tanto, $x = 0$. ■

Ejemplo 5.1.12

Determinar las soluciones reales de la ecuación $3^{(2^x)} = 1$.

Solución. Observando que $1 = 3^0$, podemos reescribir la ecuación en la forma $3^{(2^x)} = 3^0$. Ahora podemos aplicar la Propiedad (5.1.9), por lo que obtenemos la ecuación $2^x = 0$. De acuerdo con la Observación 5.1.1, tenemos que $2^x > 0$ para cualquier número real x , lo que significa que la ecuación $2^x = 0$ no tiene soluciones y, por lo tanto, la ecuación $3^{(2^x)} = 1$ tampoco tiene soluciones.

Gráficamente, el hecho de que la ecuación no tiene soluciones, significa que la gráfica de la función exponencial $3^{(2^x)}$ y la gráfica de la función constante igual a 1, no se intersectan. A continuación mostramos ambas gráficas en el mismo plano cartesiano.

**Ejemplo 5.1.13**

Determinar las soluciones reales de la ecuación $5^{x^2-3} = 25^x$.

Solución. Para poder aplicar la Propiedad (5.1.9), necesitamos reescribir la ecuación en donde la base sea el mismo número en ambos lados. Observando que $25 = 5^2$, tenemos que $25^x = (5^2)^x = 5^{2x}$, por lo que nuestra ecuación ahora es $5^{x^2-3} = 5^{2x}$. Como la base es la misma en ambos lados y no es igual a 1, los exponentes deben ser iguales según la Propiedad (5.1.9). Así, $x^2 - 3 = 2x$, esto es, $x^2 - 2x - 3 = 0$ y, factorizando, resulta la ecuación $(x - 3)(x + 1) = 0$, de donde se sigue que los valores de x son $x = 3$ y $x = -1$. ■

Ejemplo 5.1.14

Si la ecuación $2^{(x^2)} = 32^{3x+18}$ tiene dos soluciones reales, determinar su producto.

Solución. Observando que $32 = 2^5$, podemos reescribir la ecuación como $2^{(x^2)} = 2^{5(3x+18)} = 2^{15x+90}$. Aplicando la Propiedad (5.1.9), necesariamente debemos tener que $x^2 = 15x + 90$, esto es, $x^2 - 15x - 90 = 0$. Por las fórmulas de Vieta (2.5.8), el producto de las raíces de esta ecuación es igual a $-90/1 = -90$. ■

Ejemplo 5.1.15

Determinar las soluciones reales de la ecuación $\frac{0.2^{x-0.5}}{\sqrt{5}} = 5(0.04^{x-1})$.

Solución. Observemos que $0.2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1}$ y que $0.04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = 5^{-2}$. Entonces, podemos reescribir la ecuación en la forma

$$5^{0.5-x} \cdot 5^{-0.5} = 5(5^{-2})^{x-1},$$

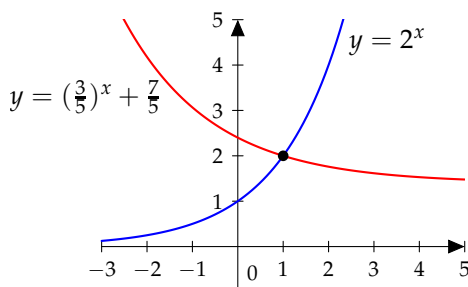
esto es, $5^{-x} = 5^{3-2x}$. Aplicando ahora la Propiedad (5.1.9), obtenemos la ecuación $-x = 3 - 2x$, cuya única solución es $x = 3$. ■

En los ejemplos anteriores, la Propiedad (5.1.9) fue crucial para resolver las ecuaciones. Sin embargo, no siempre es posible usar esta propiedad para resolver una ecuación exponencial, como veremos a continuación.

Ejemplo 5.1.16

Determinar las soluciones reales de la ecuación $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$.

Solución. Como no podemos reescribir la ecuación en la forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, no podemos utilizar la Propiedad (5.1.9). Tenemos que proceder de otra forma. Intentemos hallar una solución particular por el método de selección. Podemos ver que $x = 1$ es una solución, ya que $\frac{3}{5} + \frac{7}{5} = 2$. Las gráficas de las funciones $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5}$ y 2^x se muestran a continuación en el mismo plano cartesiano.



Con la ayuda de las gráficas podemos conjeturar que no hay otras soluciones además de la solución $x = 1$. Sin embargo, la gráfica no es suficiente para garantizar que esto es así. Tenemos que dar una justificación.

De acuerdo con (5.1.4), la función 2^x crece cuando x crece, esto es, 2^x crece por toda la recta numérica. Por otro lado, como $0 < \frac{3}{5} < 1$, la función $(\frac{3}{5})^x$ disminuye cuando x aumenta, esto es, $(\frac{3}{5})^x$ disminuye por toda la recta numérica y, por consiguiente, $(\frac{3}{5})^x + \frac{7}{5}$ también, ya que esta función es la función $(\frac{3}{5})^x$ desplazada $\frac{7}{5}$ unidades hacia arriba.

Por lo tanto, $x = 1$ es la única solución.



A continuación veremos un ejemplo donde es útil hacer un cambio de variable para resolver una ecuación exponencial.

Ejemplo 5.1.17

Determinar las soluciones reales de la ecuación $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Solución. Como $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$ y $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, la ecuación puede escribirse en la forma $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$. Haciendo el cambio de variable $y = 2^x$, obtenemos la ecuación cuadrática $y^2 + 2y - 24 = 0$, esto es, $(y + 6)(y - 4) = 0$ de donde $y = -6$ o $y = 4$.

Si $2^x = 4 = 2^2$, entonces por la Propiedad (5.1.9) obtenemos la solución $x = 2$.

Si $2^x = -6$, entonces no hay soluciones, ya que de acuerdo con la Observación 5.1.1, $2^x > 0$ para cualquier número real x .

Por lo tanto, la única solución de la ecuación es $x = 2$.



Hay un tipo de ecuación exponencial más general que la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Una ecuación de la forma $(h(x))^{f(x)} = (h(x))^{g(x)}$ se llama **ecuación exponencial potencial**. En este tipo de ecuaciones, la función de la base $h(x)$ no es una constante. Si es conocido que $h(x) \neq 0$ y $h(x) \neq 1$, tales ecuaciones, como la exponencial usual, se resuelven mediante la igualación de los exponentes: $f(x) = g(x)$.

Ejemplo 5.1.18

Determinar las soluciones reales de la ecuación $x \left(x^{1/x} \right)^3 = \frac{x^x}{x}$.

Solución. Vamos a comenzar simplificando cada lado de la ecuación usando las leyes de los exponentes. En el lado izquierdo, tenemos que

$$x \left(x^{1/x} \right)^3 = x \cdot x^{\frac{3}{x}} = x^{1 + \frac{3}{x}}.$$

Por otro lado, en el lado derecho tenemos que $\frac{x^x}{x} = x^{x-1}$. Así, nuestra ecuación ahora es $x^{1+\frac{3}{x}} = x^{x-1}$. Esta ecuación tiene la forma de una ecuación exponencial potencial.

Suponiendo que $x \neq 0$ y $x \neq 1$, podemos igualar los exponentes de la ecuación, esto es, obtenemos que $1 + \frac{3}{x} = x - 1$. Multiplicando ambos lados por x y simplificando, resulta la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$. Luego, $(x - 3)(x + 1) = 0$, de donde se sigue que $x = -1$ o $x = 3$. Estos dos valores han de ser comprobados sustituyéndolos en la ecuación inicial.

Si $x = -1$, obtenemos que $1 = 1$, una igualdad cierta.

Si $x = 3$, obtenemos que $3(3^{1/3})^3 = \frac{3^3}{3}$, esto es, $3^2 = 3^2$, una igualdad cierta.

Observemos que $x \neq 0$, ya que el lado derecho de la ecuación inicial tiene división entre x .

Hay un caso especial que debemos considerar. Específicamente, si $x = 1$, entonces la ecuación $x^{f(x)} = x^{g(x)}$ no requiere que $f(x)$ y $g(x)$ sean iguales. Sustituyendo $x = 1$ en la ecuación original, ambos lados de la ecuación son iguales a 1, por lo que $x = 1$ también es una solución de la ecuación.

Por lo tanto, la ecuación tiene 3 soluciones reales: -1 , 1 y 3 . ■

Observación 5.1.19

Durante la resolución de una ecuación de la forma $(h(x))^{f(x)} = (h(x))^{g(x)}$, hay que analizar 4 casos:

- 1) Cuando $h(x) = 1$. En este caso la ecuación se satisface para cualquier $f(x)$ y cualquier $g(x)$.
- 2) Cuando $h(x) = 0$. En este caso, $(h(x))^{f(x)} = (h(x))^{g(x)}$ para cualquier $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$. (Recordemos que la expresión 0^r solo tiene sentido con $r > 0$).
- 3) Cuando $h(x) = -1$. En este caso, si restringimos $f(x)$ y $g(x)$ ser enteros, entonces $(h(x))^{f(x)} = (h(x))^{g(x)}$ cuando $f(x)$ y $g(x)$ tienen la misma paridad (aún cuando $f(x) \neq g(x)$).
- 4) Cuando $h(x) \neq 0$ y $h(x) \neq 1$. En este caso resolvemos mediante la igualación de los exponentes: $f(x) = g(x)$.

Ejemplo 5.1.20

Determinar las soluciones reales de la ecuación

$$(x^2 + x - 57)^{3x^2+3} = (x^2 + x - 57)^{10x}.$$

Solución. De acuerdo con la Observación 5.1.19, debemos analizar cuatro casos.

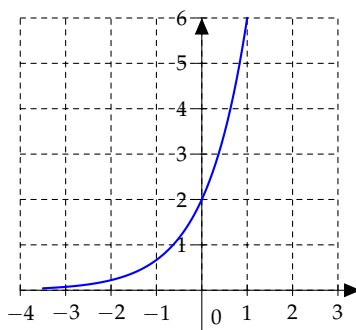
- 1) $x^2 + x - 57 = 1$, esto es, $x^2 + x - 58 = 0$. En este caso, la ecuación exponencial toma la forma $1^{3x^2+3} = 1^{10x}$, esto es, $1 = 1$, por lo que las raíces de la ecuación $x^2 + x - 58 = 0$ son también raíces de la ecuación exponencial. Resolviendo la ecuación cuadrática, obtenemos las soluciones $\frac{-1 \pm \sqrt{233}}{2}$.
- 2) $x^2 + x - 57 = 0$. En este caso, la ecuación toma la forma $0^{3x^2+3} = 0^{10x}$. Esta ecuación solo puede ser satisfecha con los valores de x tales que $3x^2 + 3 > 0$ y $10x > 0$ (pues la expresión 0^r solo tiene sentido con $r > 0$). Resolviendo la ecuación $x^2 + x - 57 = 0$, encontramos las soluciones $\frac{-1 \pm \sqrt{229}}{2}$. El valor $\frac{-1 - \sqrt{229}}{2} < 0$ no satisface la condición $10x > 0$, en tanto que $\frac{-1 + \sqrt{229}}{2} > 0$ satisface ambas condiciones $3x^2 + 3 > 0$ y $10x > 0$. Así, el número $\frac{-1 + \sqrt{229}}{2}$ es solución de la ecuación.
- 3) $x^2 + x - 57 = -1$, esto es, $x^2 + x - 56 = 0$. En este caso, la ecuación toma la forma $(-1)^{3x^2+3} = (-1)^{10x}$. Resolviendo la ecuación $x^2 + x - 56 = 0$, obtenemos que $(x - 7)(x + 8) = 0$, de donde hallamos las soluciones 7 y -8. Es fácil ver que el valor $x = 7$ satisface la ecuación $(-1)^{3x^2+3} = (-1)^{10x}$, en tanto que el valor $x = -8$ no la satisface. Luego, la única solución de la ecuación, en este caso, es $x = 7$.
- 4) $x^2 + x - 57 \neq 0$ y $x^2 + x - 57 \neq 1$. En este caso, igualando los exponentes de la ecuación, obtenemos que $3x^2 + 3 = 10x$, esto es, $3x^2 - 10x + 3 = 0$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos las soluciones 3 y $\frac{1}{3}$, las cuales satisfacen las condiciones $x^2 + x - 57 \neq 0$ y $x^2 + x - 57 \neq 1$. Los valores 3 y $\frac{1}{3}$ han de ser comprobados sustituyéndolos en la ecuación original.
 Con $x = 3$, obtenemos que $(-45)^{30} = (-45)^{30}$, una igualdad cierta.
 Con $x = \frac{1}{3}$, obtenemos que $(\frac{4}{9} - 57)^{10/3} = (\frac{4}{9} - 57)^{10/3}$, una igualdad cierta.

Por lo tanto, la ecuación tiene 6 soluciones reales: $\frac{1}{3}, 3, 7, \frac{-1 + \sqrt{229}}{2}$ y $\frac{-1 + \sqrt{233}}{2}$. ■

Actividad de Aprendizaje 5.1.21

- 1) (S) Grafica la función $y = (\frac{1}{2})^{(x^2)}$ y describe su comportamiento. Compara su comportamiento con el de la función $(\frac{1}{2})^x$ del Ejemplo 5.1.5.
- 2) (S) Grafica las funciones 2^{1+3x} y 2^{1-3x} en un mismo plano cartesiano y describe sus comportamientos.
- 3) (S) Si $3^x = 12$, determina el valor de 9^{x-1} .
- 4) (S) Determina una expresión para la gráfica de la función exponencial

que se muestra a continuación.



- 5) (SA) Determina las soluciones reales de la ecuación $3^x + 4^x = 5^x$. (Sugerencia: Reescribe la ecuación y usa la gráfica de las funciones involucradas en la ecuación reescrita. Justifica como se hizo en la solución del Ejemplo 5.1.16).
- 6) (SA) Si x es un número real que satisface la ecuación $e^x - e^{-x} = \frac{3}{2}$, determina el valor de e^x .
- 7) (SS) Si x, y son números reales tales que $\frac{x^3}{y^4} = 10^5$ y $x^2 y^5 = 10^{11}$, determina los valores de x, y .
- 8) Determina las soluciones reales de las siguientes ecuaciones.
 - a) (S) $3^{(27^x)} = 27^{(3^x)}$.
 - b) (S) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.
 - c) (S) $(0.6)^x \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$.
 - d) (SA) $4^x - 12(2^x) = -32$.
 - e) (SA) $\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x (0.125)^{1/x}}} = 4\sqrt[3]{2}$.
 - f) (SA) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$.
 - g) (SA) $2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} = -288$.
 - h) (SA) $2 \cdot 7^{3x} - 5 \cdot 49^{3x} + 3 = 0$.
 - i) (SA) $\frac{2^x + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$.
 - j) (SA) $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$.

Actividad de Aprendizaje 5.1.21 (Continuación)

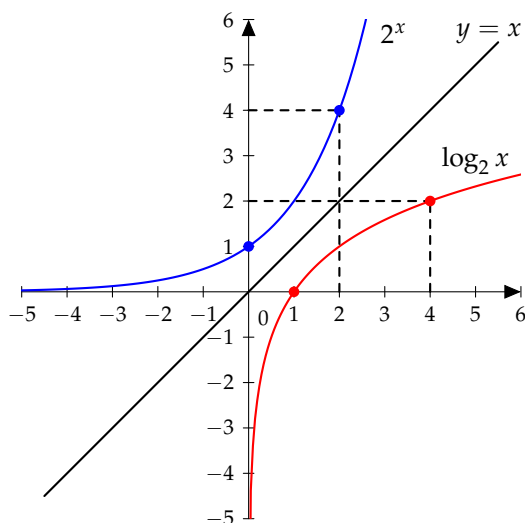
- k) (SS) $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$.
- l) (SS) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$.
- 9) Determina las soluciones reales de las siguientes ecuaciones exponenciales potenciales.
- 1) (SA) $x^{x-1} = x^{1-x}$.
- 2) (SA) $x^{(x+2)(x+3)} = 1$.
- 3) (SA) $(x^2 - x - 1)^{x^2-1} = 1$.
- 4) (SA) $(3x - 4)^{2x^2+2} = (3x - 4)^{5x}$.
- 5) (SA) $x^{(x^2)} = x^{2x+1}$.
- 10) (SA) Determina los números enteros n tales que $(n^2 - n - 1)^{n+2} = 1$.
- 11) Determina las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales. Utiliza los mismos procedimientos para resolver un sistema de ecuaciones algebraicas. En muchos casos, antes de aplicar uno u otro método para resolver el sistema, es preciso transformar cada ecuación del sistema a su forma más sencilla.
- a) (SA) $25^{2x} + 25^{2y} = 30, 25^{x+y} = 5\sqrt{5}$.
- b) (SA) $2^x \cdot 3^y = 12, 2^y \cdot 3^x = 18$.
- c) (SA) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{65}{36}, xy - x + y = 118$.
- d) (SA) $2^x + 2^y = 12, x + y = 5$.
- e) (SA) $64^{2x} + 64^{2y} = 12, 64^{x+y} = 4\sqrt{2}$.

5.2. Logaritmos

Sea a un número positivo distinto de 1. Una función de la forma $f(x) = \log_a x$ recibe el nombre de **función logarítmica** en base a . Las funciones $\log_a x$ y a^x son una inversa de la otra, esto es, sus gráficas son simétricas respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo 5.2.1

Las gráficas de las funciones $\log_2 x$ y 2^x se muestran a continuación.



Podemos observar que las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto a la recta $y = x$.

En estas gráficas podemos ver que $2^0 = 1$ y $\log_2 1 = 0$. En la igualdad $\log_2 1 = 0$, podemos observar que el resultado 0 es la potencia a la que debemos elevar la base 2 para obtener el 1.

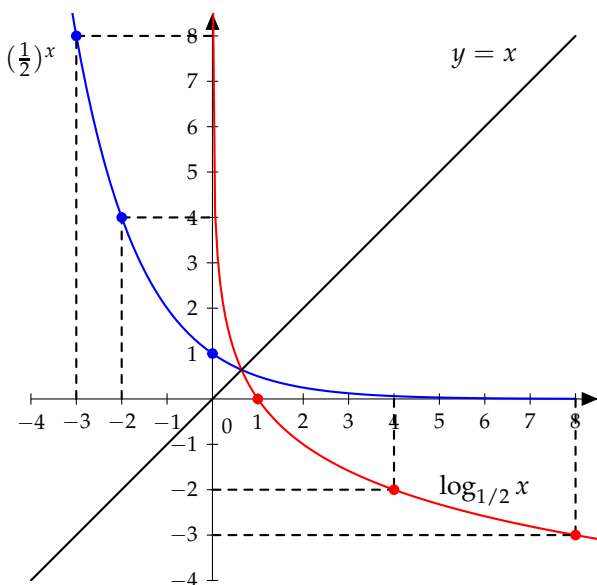
También podemos ver en estas gráficas que $2^2 = 4$ y $\log_2 4 = 2$. En particular, en la igualdad $\log_2 4 = 2$ podemos observar que el resultado 2 es la potencia a la que debemos elevar la base 2 para obtener el 4.

En general, esto es así. Por ejemplo, la igualdad $\log_2 32 = r$, significa que r es la potencia a la que debemos elevar la base 2 para obtener 32. En otras palabras, las ecuaciones $r = \log_2 32$ y $2^r = 32$ son equivalentes. Como $2^5 = 32$, podemos concluir que $\log_2 32 = 5$.

Podemos observar a partir de la gráfica de la función $f(x) = \log_2 x$ que cuando x toma valores cada vez mayores, los valores de $f(x)$ también se hacen más grandes, esto es, las funciones 2^x y $\log_2 x$ tienen el mismo tipo de comportamiento.

Ejemplo 5.2.2

A continuación tenemos las gráficas de las funciones $\log_{1/2} x$ y $(\frac{1}{2})^x$.



Podemos observar la simetría que hay entre ambas gráficas con respecto a la recta $y = x$.

También observamos a partir de estas gráficas que:

- $\log_{1/2} 1 = 0$ ya que $(\frac{1}{2})^0 = 1$;
- $\log_{1/2} 4 = -2$ ya que $(1/2)^{-2} = \frac{1}{(1/2)^2} = \frac{1}{1/4} = 4$;
- $\log_{1/2} 8 = -3$ ya que $(1/2)^{-3} = \frac{1}{(1/2)^3} = \frac{1}{1/8} = 8$.

También podemos observar que cuando x toma valores cada vez mayores, los valores de la función $\log_{1/2} x$ disminuyen, esto es, las funciones $(\frac{1}{2})^x$ y $\log_{1/2} x$ tienen el mismo tipo de comportamiento.

El comportamiento de la función logarítmica $\log_a x$ es como el comportamiento de la función exponencial a^x , como veremos a continuación.

Comportamiento de la función logarítmica $\log_a x$ (5.2.3)

Sea $f(x) = \log_a x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$.

- 1) Si $a > 1$, entonces $f(x)$ crece cuando x crece, esto es, $f(x) > f(y)$ siempre que $x > y$.
- 2) Si $0 < a < 1$, entonces $f(x)$ disminuye cuando x aumenta, esto es, $f(x) < f(y)$ siempre que $x > y$.

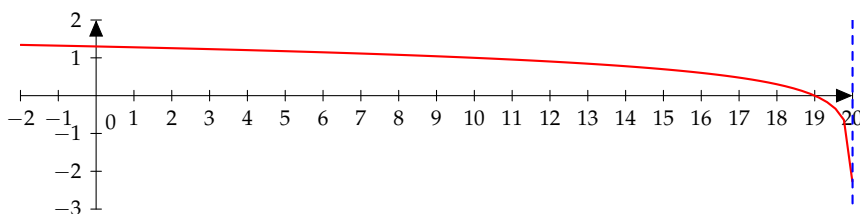
Observación 5.2.4

Una función logarítmica más general que la función $\log_a x$, es la función $\log_a f(x)$, donde $f(x)$ es otra función en la variable x . En particular, en el caso cuando $f(x) = x$, obtenemos la función $\log_a x$.

El comportamiento de la función $\log_a f(x)$ depende del comportamiento de la función $f(x)$, por lo que es más sofisticado que el de la función $\log_a x$.

Ejemplo 5.2.5

Consideremos la función $f(x) = \log_{10}(20 - x)$. Esta función está definida en los números reales x tales que $20 - x > 0$, esto es, en los números reales menores que 20. En los números reales mayores o iguales que 20, la función $f(x)$ no está definida. A continuación mostramos la gráfica de esta función, donde hemos marcado con línea punteada la gráfica de la recta $x = 20$. Observamos que los valores de $f(x)$ van disminuyendo conforme x aumenta y que conforme x se acerca a 20 la gráfica de $f(x)$ se acerca cada vez más a la gráfica de la recta $x = 20$ pero sin tocarla.



Como veremos a lo largo de esta sección, para poder entender los logaritmos será necesario poder pasar de la forma logarítmica $\log_a b = c$ a la forma exponencial $a^c = b$ y viceversa.

Equivalencia de la forma logarítmica y la forma exponencial (5.2.6)

Si a y b son números reales positivos y $a \neq 1$, entonces las expresiones $\log_a b = c$ y $a^c = b$ son equivalentes.

En este libro, solo definiremos logaritmos para bases positivas y excluimos al número 1. Para entender por qué excluimos al 1 como base tratemos de entender qué significaría $\log_1 1$. Como $1^y = 1$ para todo número real y , la relación $\log_1 x$ no sería una función. También vamos a restringir el dominio y el rango de cada logaritmo a los números reales.

Vamos a comenzar nuestros ejemplos, calculando unos logaritmos sencillos.

Ejemplo 5.2.7

Evaluar los logaritmos: $\log_2 8$, $\log_2 16$ y $\log_a a^p$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Solución. Ya que $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$, tenemos que $\log_2 8 = 3$ y $\log_2 16 = 4$. Por último, observando que debemos elevar la base a a la potencia p para obtener a^p , concluimos que $\log_a a^p = p$. ■

Observación 5.2.8

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $\log_a a^p = p$.

Ejemplo 5.2.9

Determinar $\log_4 128$.

Solución. Sea $x = \log_4 128$. Como no conocemos mucho a cerca de ecuaciones que involucran logaritmos, convertiremos esta ecuación a su forma exponencial. De acuerdo con la Propiedad (5.2.6), tenemos la ecuación equivalente $4^x = 128$. Ahora procederemos a resolver esta ecuación exponencial. Escribiendo a 4 y a 128 en términos de la base común 2, tenemos que $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$ y $128 = 2^7$, por lo que $2^{2x} = 2^7$. Aplicando ahora la Propiedad de igualdad para ecuaciones exponenciales (5.1.9), concluimos que $2x = 7$, esto es, $x = \frac{7}{2}$. Por lo tanto, $\log_4 128 = \frac{7}{2}$. ■

Observemos que la estrategia de la solución del ejemplo anterior para evaluar un logaritmo es igualando a x el logaritmo que queremos calcular y después escribir de manera equivalente la ecuación resultante en forma exponencial.

Ejemplo 5.2.10

Determinar $\log_{3/2} \frac{4}{9}$.

Solución. Haciendo $x = \log_{3/2} \frac{4}{9}$ y aplicando la Propiedad (5.2.6) tenemos la ecuación exponencial equivalente $(\frac{3}{2})^x = \frac{4}{9}$. Como $\frac{4}{9} = (\frac{2}{3})^2 = (\frac{3}{2})^{-2}$, obtenemos la ecuación $(\frac{3}{2})^x = (\frac{3}{2})^{-2}$ y, por la Propiedad (5.1.9), concluimos que $x = -2$, esto es, $\log_{3/2} \frac{4}{9} = -2$. ■

Ejemplo 5.2.11

Determinar $\log_{3\sqrt{3}} 243$.

Solución. Haciendo $x = \log_{3\sqrt{3}} 243$ y aplicando la Propiedad (5.2.6), tenemos la ecuación exponencial equivalente $(3\sqrt{3})^x = 243$. Como $3\sqrt{3} = 3 \cdot 3^{1/2} = 3^{3/2}$ y $243 = 3^5$, nuestra ecuación es $3^{3x/2} = 3^5$. Luego, por la Propiedad (5.1.9), concluimos que $\frac{3x}{2} = 5$, esto es, $x = \frac{10}{3}$. Por lo tanto, $\log_{3\sqrt{3}} 243 = \frac{10}{3}$. ■

Ejemplo 5.2.12 Logaritmo de una potencia

Si b es un número positivo y c es cualquier número real, ¿qué relación hay entre $\log_a b^c$ y $\log_a b$?

Solución. Empecemos escribiendo las respectivas relaciones equivalentes. De acuerdo con la Propiedad (5.2.6), la primera igualdad es equivalente con $a^x = b$ y, la segunda igualdad, es equivalente con $a^y = b^c$. Sustituyendo el valor de b de la primera igualdad en la segunda igualdad, obtenemos que

$$a^y = (a^x)^c = a^{cx}$$

y, por la Propiedad (5.1.9), concluimos que $y = cx$. Por lo tanto, tenemos la relación $\log_a b^c = c \log_a b$. ■

Ejemplo 5.2.13 Logaritmo de un producto

Si b y c son números positivos, determinar una relación para $\log_a bc$ en términos de $\log_a b$ y $\log_a c$.

Solución. Sean $x = \log_a b$ y $y = \log_a c$. De acuerdo con la Propiedad (5.2.6), tenemos que $a^x = b$ y $a^y = c$. Multiplicando estas dos relaciones, obtenemos que

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y = bc,$$

lo cual es equivalente a la relación $\log_a bc = x + y$ según la Propiedad (5.2.6). Por lo tanto, concluimos que $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$. ■

Ejemplo 5.2.14 Logaritmo de un cociente

Si b y c son números positivos, determinar una relación para $\log_a \frac{b}{c}$ en términos de $\log_a b$ y $\log_a c$.

Solución. Sean $x = \log_a b$ y $y = \log_a c$. De acuerdo con la Propiedad (5.2.6), tenemos que $a^x = b$ y $a^y = c$. Dividiendo estas dos relaciones, obtenemos que

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} = \frac{b}{c},$$

lo cual es equivalente a la relación $\log_a \frac{b}{c} = x - y$. Por lo tanto, concluimos que $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$. ■

A continuación, listamos las propiedades que obtuvimos en los Ejemplos (5.2.12), (5.2.13) y (5.2.14), junto con otras propiedades de los logaritmos.

Propiedades fundamentales de los logaritmos (5.2.15)

Sea $a > 0$ y $a \neq 1$.

1) (Logaritmo de un producto) Si $b > 0$ y $c > 0$, entonces

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c.$$

2) (Logaritmo de un cociente) Si $b > 0$ y $c > 0$, entonces

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

3) (Logaritmo de una potencia) Si $b > 0$ y c es cualquier número real, entonces

$$\log_a b^c = c \log_a b.$$

4) (Cambio de base) Si $b > 0$, $c > 0$ y $c \neq 1$, entonces

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}.$$

5) Si $b > 0$ y n es un número real distinto de 0, entonces $\log_{a^n} b^n = \log_a b$.

6) (Regla de la cadena para logaritmos) Si $b > 0$, $b \neq 1$ y $c > 0$, entonces

$$(\log_a b)(\log_b c) = \log_a c.$$

7) (Identidad logarítmica fundamental) Si $b > 0$, entonces $a^{\log_a b} = b$.

Observación 5.2.16

Hay que ser muy cuidadosos al aplicar alguna propiedad de los logaritmos. Algunos de los errores más comunes que se cometen cuando se trabaja con logaritmos, son los siguientes:

$$\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y, \quad \frac{\log_a x}{\log_a y} = \log_a \frac{x}{y}, \quad (\log_a x)(\log_a y) = \log_a xy.$$

¡Ninguna de estas igualdades es cierta en general!

Se deja de ejercicio mostrar con ejemplos concretos que cada una de las igualdades anteriores es falsa.

Ejemplo 5.2.17

Evaluar $49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25}$.

Solución. Escribiendo $49 = 7^2$, tenemos que

$$49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25} = 7^{2-\frac{1}{2}\log_7 25}.$$

Usando ahora las Propiedades (5.2.15) incisos 3) y 2), junto con la Observación 5.2.8, tenemos que

$$2 - \frac{1}{2}\log_7 25 = 2 - \log_7 \sqrt{25} = 2 - \log_7 5 = \log_7 7^2 - \log_7 5 = \log_7 \frac{7^2}{5} = \log_7 \frac{49}{5}.$$

De esta forma, tenemos que

$$49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25} = 7^{\log_7 \frac{49}{5}}$$

y, por la identidad logarítmica fundamental (inciso 7) de las Propiedades (5.2.15)), concluimos que $7^{\log_7 \frac{49}{5}} = \frac{49}{5}$. Por lo tanto, $49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25} = \frac{49}{5} = 9.8$. ■

Cuando la base de un logaritmo es el número 10, se escribe $\log$ en lugar de $\log_{10}$. También, cuando la base de un logaritmo es el número e , se escribe $\ln$ en lugar de $\log_e$ y se llama a $\ln$ logaritmo natural.

Ejemplo 5.2.18

Evaluar $\frac{4}{\log 5} - \frac{2}{\log_4 5}$.

Solución. Podríamos comenzar realizando la resta de las fracciones para tener un denominador común. Así,

$$\frac{4}{\log 5} - \frac{2}{\log_4 5} = \frac{4 \log_4 5 - 2 \log 5}{(\log 5)(\log_4 5)}.$$

Desafortunadamente, no tenemos una buena manera de trabajar con el numerador o con el denominador. Ninguna de nuestras propiedades de logaritmos nos ayuda. Una razón de que no podemos simplificar la diferencia en el numerador es que las bases de los logaritmos son distintas. Sin embargo, en ambos logaritmos, el número al que se le está tomando el logaritmo, es el mismo número 5.

Sabemos cómo simplificar sumas y diferencias de logaritmos cuando las bases son

la misma, por lo que trataremos de escribir todos los logaritmos en una misma base y, nuestro candidato para esa base común, será el número 5.

Aplicando el inciso 4) de las Propiedades (5.2.15) con $a = b = 10$, tenemos que $\frac{\log 10}{\log 5} = \log_5 10$, esto es, $\frac{1}{\log_5 5} = \log_5 10$ ya que $\log 10 = 1$. De manera análoga, aplicando de nuevo el inciso 4) de las Propiedades (5.2.15) con $a = b = 4$ obtenemos que $\frac{\log_4 4}{\log_4 5} = \log_5 4$, esto es, $\frac{1}{\log_4 5} = \log_5 4$ ya que $\log_4 4 = 1$.

Luego, la expresión que queremos evaluar es

$$\frac{4}{\log 5} - \frac{2}{\log_4 5} = 4 \log_5 10 - 2 \log_5 4.$$

Ahora podemos utilizar algunas de nuestras otras propiedades de logaritmos para evaluar esta expresión.

$$\begin{aligned} 4 \log_5 10 - 2 \log_5 4 &= \log_5 10^4 - \log_5 4^2 \quad (\text{propiedad 3}) \\ &= \log_5 \frac{10^4}{4^2} \quad (\text{propiedad 2}) \\ &= \log_5 625 = \log_5 5^4 = 4. \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que $\frac{4}{\log 5} - \frac{2}{\log_4 5} = 4$. ■

Ejemplo 5.2.19

Determinar $\log 25$ en términos de $a = \log 2$.

Solución. Usando el inciso 3) de las Propiedades (5.2.15), tenemos que $\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5$. Expresemos ahora al número 5 usando los números 10 y 2 (esto es, usando la base dada y el número cuyo logaritmo es conocido), utilizando las operaciones de multiplicación, división o potenciación.

Como $5 = \frac{10}{2}$, usando el inciso 2) de las Propiedades (5.2.15), tenemos que

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a.$$

Por lo tanto, $\log 25 = 2(1 - a)$. ■

Ejemplo 5.2.20

Determinar $\log_3 18$ en términos de $a = \log_3 12$.

Solución. Tenemos que $18 = 3^2 \cdot 2$. Usando el inciso 1) de las Propiedades (5.2.15) y la Observación 5.2.8, tenemos que

$$\log_3 18 = \log_3 3^2 \cdot 2 = \log_3 3^2 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2.$$

Ahora, sea $x = \log_3 2$. Entonces, $\log_3 18 = 2 + x$ y

$$a = \log_3 12 = \log_3 3 \cdot 2^2 = \log_3 3 + \log_3 2^2 = 1 + 2 \log_3 2 = 1 + 2x,$$

de donde $x = \frac{a-1}{2}$. Por lo tanto, $\log_3 18 = 2 + x = 2 + \frac{a-1}{2} = \frac{a+3}{2}$. ■

Ejemplo 5.2.21

Determinar $\log_{49} 16$ en términos de $a = \log_{14} 28$.

Solución. Usando las Propiedades (5.2.15) incisos 5) y 3), tenemos que

$$\log_{49} 16 = \log_{\sqrt{49}} \sqrt{16} = \log_7 4 = \log_7 2^2 = 2 \log_7 2.$$

Haciendo $x = \log_7 2$, tenemos que $\log_{49} 16 = 2x$.

Por otro lado, usando las Propiedades (5.2.15) incisos 4), 1) y 3), obtenemos que

$$a = \log_{14} 28 = \frac{\log_7 28}{\log_7 14} = \frac{\log_7 2^2 \cdot 7}{\log_7 2 \cdot 7} = \frac{2 \log_7 2 + \log_7 7}{\log_7 2 + \log_7 7} = \frac{2x + 1}{x + 1}.$$

Luego, tenemos la ecuación $a(x + 1) = 2x + 1$, esto es, $x(2 - a) = a - 1$. Como $14^2 \neq 28$, tenemos que $a \neq 2$, por lo que $x = \frac{a-1}{2-a}$ y, por consiguiente, $\log_{49} 16 = 2x = \frac{2(a-1)}{2-a}$. ■

Ejemplo 5.2.22

Determinar $\log_{12} 60$ en términos de $a = \log_6 30$ y $b = \log_{15} 24$.

Solución. Observemos que los tres logaritmos tienen bases distintas. Cambiemos todos los logaritmos a una base común, para que sea más fácil de trabajar. La cuestión es: ¿cuál base usar? Factoricemos a los números 60, 30 y 24. Tenemos que $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y $24 = 2^3 \cdot 3$. También debemos considerar las factorizaciones de las bases de los logaritmos del problema: $12 = 2^2 \cdot 3$, $6 = 2 \cdot 3$ y $15 = 3 \cdot 5$. Tenemos tres candidatos a ser base de nuestros logaritmos: 2, 3 y 5.

Si elegimos usar la base 2, aplicando las Propiedades (5.2.15) incisos 4) y 1), tenemos que

$$\log_{12} 60 = \frac{\log_2 60}{\log_2 12} = \frac{\log_2 4 \cdot 3 \cdot 5}{\log_2 4 \cdot 3} = \frac{2 + \log_2 3 + \log_2 5}{2 + \log_2 3}.$$

Sean $x = \log_2 3$ y $y = \log_2 5$. Entonces, $\log_{12} 60 = \frac{2+x+y}{2+x}$.

Por otro lado, usando de nuevo las Propiedades (5.2.15) incisos 4) y 1), tenemos que

$$\begin{aligned} a = \log_6 30 &= \frac{\log_2 30}{\log_2 6} = \frac{\log_2 2 \cdot 3 \cdot 5}{\log_2 2 \cdot 3} = \frac{1 + x + y}{1 + x}, \\ b = \log_{15} 24 &= \frac{\log_2 24}{\log_2 15} = \frac{\log_2 8 \cdot 3}{\log_2 3 \cdot 5} = \frac{3 + x}{x + y}. \end{aligned}$$

Luego, tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{1 + x + y}{1 + x} = a, \\ \frac{x + 3}{x + y} = b. \end{cases}$$

Basta determinar $x + y$ y x en términos de a y b .

De la primera ecuación, obtenemos que $x + y = a(1 + x) - 1$. Sustituyendo en la segunda ecuación, resulta que

$$\frac{x + 3}{a(1 + x) - 1} = b,$$

esto es, $x + 3 = ab(1 + x) - b = ab + abx - b$. Luego, $x(1 - ab) = ab - b - 3$. Observemos que si $ab = 1$, entonces $ab - b - 3 = 0$, esto es, $b = -2$, lo cual no puede ser ya que $b = \log_{15} 24$ es un número positivo. Esto significa que $ab \neq 1$, que es equivalente a que $1 - ab \neq 0$, por lo que podemos concluir que $x = \frac{ab - b - 3}{1 - ab}$, por lo tanto,

$$x + y = a(1 + x) - 1 = a \left(1 + \frac{ab - b - 3}{1 - ab} \right) - 1 = \frac{1 + 2a}{ab - 1}.$$

Así, concluimos que

$$\log_{12} 60 = \frac{2 + x + y}{2 + x} = \frac{2 + \frac{1 + 2a}{ab - 1}}{2 + \frac{ab - b - 3}{1 - ab}} = \frac{2ab + 2a - 1}{ab + b + 1}.$$



Actividad de Aprendizaje 5.2.23

- 1) (S) A partir de la gráfica de la función e^x , grafica la función $\ln x$. Recuerda que estas dos funciones son inversas una de la otra.
- 2) (S) Determina el número de puntos de intersección de las gráficas de las funciones $f(x) = 2 \log x$ y $g(x) = \log 2x$. Justifica.
- 3) (SA) La recta $x = k$ interseca a las gráficas de las funciones $f(x) = \log_5 x$ y $g(x) = \log_5(x + 4)$. Si la distancia entre los puntos de intersección es 0.5, determina el valor de k .
- 4) (S) Sin utilizar calculadora, evalúa lo siguiente.
 - a) $\log_3 27^{1000}$.
 - b) $6^{\log_6 418}$.
 - c) $\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 6$.
 - d) $\frac{\log_2 125}{\log_2 25}$.
 - e) $(\log_2 5)(\log_5 12) + (\log_2 7)(\log_7 \frac{8}{3})$.
 - f) $\frac{2^{\log_4 108}}{2^{\log_4 3}}$.
 - g) $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)(\log_5 6)(\log_6 7)(\log_7 8)$.
- 5) (S) Sin usar calculadora, evalúa $\log_8(\log_4(\log_2 16))$.
- 6) (S) Sin usar calculadora, evalúa $\log(\log \sqrt{\sqrt[5]{10}})$.
- 7) (S) Sin usar calculadora, evalúa $\left(\frac{16}{25}\right)^{\log_{125/64} 3}$.
- 8) (SA) Si $a > 1$, $b > 1$ y $p = \frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}$, determina a^p en la forma más simple.
- 9) (SA) Resuelve el Ejemplo 5.2.19 utilizando la estrategia de solución del Ejemplo 5.2.20.
- 10) (SA) Resuelve el Ejemplo 5.2.20 utilizando la estrategia de solución del Ejemplo 5.2.19.
- 11) (SA) Si x es un número positivo diferente de 1, simplifica la suma

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_5 x}.$$

Actividad de Aprendizaje 5.2.23 (Continuación)

- 12) (SS) Si $p > 0$, $q > 0$ y $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16} (p + q)$, determina el valor de q/p .
- 13) (SS) Sin usar calculadora, evalúa $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$.
- 14) (SA) Evalúa $\log 1250$ si $\log 2 = 0.3010$.
- 15) (SS) Explica qué propiedad de (5.2.15) justifica la igualdad $\frac{1}{\log_b c} = \log_c b$.
- 16) (SA) Determina $\log_{100} 40$ en términos de $a = \log_2 5$.
- 17) (SA) Determina $\log_6 16$ en términos de $a = \log_{12} 27$.
- 18) (SS) Sea n un entero positivo. Si $\log_{4n} 40\sqrt{3} = \log_{3n} 45$, determina el valor de n^3 .
- 19) (SS) En el Ejemplo 5.2.22, si en lugar de trabajar los logaritmos en base 2, hubiéramos trabajado en base 3, ¿cuál sistema de ecuaciones habríamos obtenido? ¿Se hubiera obtenido el mismo resultado? ¿Y si hubiéramos trabajado en base 5?
- 20) (SS) Determina $\log_3 5$ en términos de $a = \log_6 2$ y $b = \log_6 5$.
- 21) (SS) Simplifica las siguientes expresiones.
 - a) $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b)(\log_b a) - 1$.
 - b) $\frac{1 - (\log_a b)^3}{(\log_a b + \log_b a + 1)(\log_a \frac{a}{b})}$.
 - c) $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\log a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\log b}}\right)^{2 \log_{ab} (a+b)}$.
 - d) $0.2 \left(2a^{\log_2 b} + 3b^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{a}}\right)$.
 - e) $\frac{\log_a b - \log_{\sqrt{a}/b^3} \sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b - \log_{a/b^6} b} \div \log_b a^3 b^{-12}$.

5.3. Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación de la forma $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$, se llama **ecuación logarítmica**. Esta ecuación la podemos reescribir como

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) = 0.$$

Si $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$, podemos aplicar el inciso 2) de las Propiedades (5.2.15), obteniendo la ecuación equivalente

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad (5.1)$$

De acuerdo con la Propiedad (5.2.6), la expresión (5.1) es equivalente a la expresión $a^0 = \frac{f(x)}{g(x)}$, esto es, $1 = \frac{f(x)}{g(x)}$ ya que $a \neq 0$ y, por lo tanto, $f(x) = g(x)$. Esto significa que la ecuación logarítmica $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ tiene las mismas soluciones que la ecuación $f(x) = g(x)$ y que también satisfacen las desigualdades $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$.

A continuación resumimos esta información.

Resolución de la ecuación logarítmica (5.3.1)

Las soluciones de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ son exactamente las soluciones del siguiente sistema mixto:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

En otras palabras las raíces de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ son exactamente aquellas raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$ que simultáneamente satisfacen las condiciones: $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$.

Observación 5.3.2

Para resolver la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ no es necesario resolver el sistema mixto que aparece en la Propiedad (5.3.1). Basta resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ y, de sus soluciones, elegir aquellas que satisfacen las desigualdades $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$.

Ejemplo 5.3.3

Resolver la ecuación $\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x)$.

Solución. De acuerdo con la Propiedad (5.3.1), debemos resolver la ecuación $x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$ y de sus soluciones determinar cuáles satisfacen las desigualdades $x^2 - 3x - 5 > 0$ y $7 - 2x > 0$. Tenemos que $x^2 - x - 12 = 0$, esto es, $(x - 4)(x + 3) = 0$ de donde $x = 4$ o $x = -3$. Es fácil ver que $x = 4$ no satisface las desigualdades anteriores pero $x = -3$ sí las satisface. Por lo tanto, la única solución de la ecuación dada es $x = -3$. ■

En la resolución de algunas ecuaciones logarítmicas, es necesario utilizar las Propiedades de los logaritmos (5.2.15) antes de aplicar la Propiedad (5.3.1). Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a h(x). \quad (5.2)$$

Aplicando el inciso 1) de las Propiedades (5.2.15), la ecuación (5.2) se puede reescribir en la forma

$$\log_a f(x)g(x) = \log_a h(x). \quad (5.3)$$

Sin embargo, las ecuaciones (5.2) y (5.3) no son equivalentes, pues las desigualdades $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$ implican la desigualdad $f(x)g(x) > 0$, pero el recíproco no se cumple, esto es, si $f(x)g(x) > 0$, no es necesariamente cierto que $f(x) > 0$ y que $g(x) > 0$; podría suceder el caso que $f(x) < 0$ y $g(x) < 0$.

Así pues, al pasar de la ecuación (5.2) a la ecuación (5.3), es posible que aparezcan raíces extrañas. Por esta razón, después de resolver la ecuación (5.3), es preciso elegir entre sus raíces halladas aquellas que satisfagan las desigualdades $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ y $h(x) > 0$.

Otra forma de hacer la verificación de las soluciones halladas de la ecuación (5.3), es mediante sustitución directa en la ecuación inicial.

Ejemplo 5.3.4

Resolver la ecuación $\log(x + 4) + \log(2x + 3) = \log(1 - 2x)$.

Solución. De acuerdo con la explicación previa, la ecuación dada implica la ecuación $\log(x + 4)(2x + 3) = \log(1 - 2x)$. Las soluciones de esta ecuación no necesariamente serán soluciones de la ecuación original, debemos verificar cuáles satisfacen las desigualdades $x + 4 > 0$, $2x + 3 > 0$ y $1 - 2x > 0$.

Aplicando la Propiedad (5.3.1), tenemos la ecuación $(x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x$,

esto es, $2x^2 + 13x + 11 = 0$. Aplicando la fórmula general, obtenemos las raíces $x = -1$ y $x = -5.5$. Es fácil ver que la solución $x = -1$ satisface las tres desigualdades anteriores, mientras que la solución $x = -5.5$ solo satisface la desigualdad $1 - 2x > 0$, por lo que es una raíz extraña de la ecuación original. Por lo tanto, $x = -1$ es la única solución de la ecuación inicial. ■

Ejemplo 5.3.5

Resolver la ecuación $\log_2(x^2 - 1) = \log_{1/2}(x - 1)$.

Solución. Aplicando la Propiedad 5) de las Propiedades fundamentales de los logaritmos (5.2.15), con $n = -1$, tenemos que $\log_{1/2}(x - 1) = \log_{(1/2)^{-1}}(x - 1)^{-1} = \log_2(x - 1)^{-1}$. Luego, la ecuación a resolver se puede escribir como

$$\log_2(x^2 - 1) = \log_2(x - 1)^{-1}.$$

De acuerdo con la Propiedad (5.3.1) basta resolver la ecuación $x^2 - 1 = \frac{1}{x-1}$ y ver cuáles soluciones satisfacen las desigualdades $x^2 - 1 > 0$ y $x - 1 > 0$. Tenemos que $x^2 - 1 = \frac{1}{x-1}$ si y solo si $(x - 1)(x^2 - 1) = 1$, esto es, $x^3 - x^2 - x = 0$. Factorizando, obtenemos que $x(x^2 - x - 1) = 0$, de donde $x = 0$ o $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. De estas tres soluciones, la única solución que satisface la desigualdad $x > 1$ es $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, lo que significa que es la única solución de la ecuación inicial. ■

Ejemplo 5.3.6

Resolver la ecuación $\log^2 x + \log x + 1 = \frac{7}{\log \frac{x}{10}}$.

Solución. Claramente $x > 0$. Luego, $\log \frac{x}{10} = \log x - \log 10 = \log x - 1$. Por lo tanto, la ecuación puede escribirse como

$$\log^2 x + \log x + 1 = \frac{7}{(\log x) - 1}.$$

Haciendo $y = \log x$, obtenemos la ecuación $y^2 + y + 1 = \frac{7}{y-1}$, esto es, $y^3 - 1 = 7$, de donde $y = 2$. Tenemos entonces que $\log x = 2$ y, por la Propiedad (5.2.6), tenemos la expresión equivalente $x = 10^2 = 100$. Es fácil verificar que este valor satisface la ecuación inicial y, por lo tanto, es la única solución. ■

Analicemos ahora las ecuaciones de la forma

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x). \quad (5.4)$$

Su solución se basa en el siguiente resultado.

Resolución de la ecuación logarítmica general (5.3.7)

La ecuación (5.4) es equivalente al sistema mixto

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{array} \right.$$

En otras palabras, las raíces de la ecuación (5.4) son exactamente aquellas raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$ que simultáneamente satisfacen las siguientes condiciones:

$$f(x) > 0, g(x) > 0, a(x) > 0, a(x) \neq 1.$$

Ejemplo 5.3.8

Resolver la ecuación $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$.

Solución. De acuerdo con el Resultado (5.3.7), la ecuación es equivalente al siste-

ma mixto

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 5 - x, \\ x^2 - 1 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1. \end{cases}$$

Después de resolver la ecuación $x^2 - 1 = 5 - x$, obtenemos las soluciones $x = 2$ y $x = -3$. De estos dos valores, solo $x = 2$ satisface todas las condiciones del sistema mixto, por lo que es la única solución. ■

Ejemplo 5.3.9

Resolver la ecuación $\log_{0.5x} x^2 - 14 \log_{16x} x^2 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0$.

Solución. Observemos primero que $x > 0$ ya que $\sqrt{x}$ no está definido para números negativos. Pasando todos los logaritmos a la base 2, utilizando el inciso 4) de las Propiedades (5.2.15), obtenemos la ecuación

$$\frac{\log_2 x^2}{\log_2 0.5x} - \frac{14 \log_2 x^2}{\log_2 16x} + \frac{40 \log_2 \sqrt{x}}{\log_2 4x} = 0.$$

Como $x > 0$, podemos aplicar el inciso 3) de las Propiedades (5.2.15) a cada uno de los numeradores de la ecuación anterior, esto es,

$$\begin{aligned} \log_2 x^2 &= 2 \log_2 x, \\ 14 \log_2 x^2 &= 3(14) \log_2 x = 42 \log_2 x, \\ 40 \log_2 \sqrt{x} &= 40 \log_2 x^{1/2} = \frac{40}{2} \log_2 x = 20 \log_2 x. \end{aligned}$$

Aplicando ahora el inciso 1) de las Propiedades (5.2.15) a cada uno de los denominadores de la ecuación anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} \log_2 0.5x &= \log_2 0.5 + \log_2 x = -1 + \log_2 x, \\ \log_2 16x &= \log_2 16 + \log_2 x = 4 + \log_2 x, \\ \log_2 4x &= \log_2 4 + \log_2 x = 2 + \log_2 x. \end{aligned}$$

Luego, tenemos la ecuación

$$\frac{2 \log_2 x}{-1 + \log_2 x} - \frac{42 \log_2 x}{4 + \log_2 x} + \frac{20 \log_2 x}{2 + \log_2 x} = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $y = \log_2 x$, tenemos que

$$\frac{2y}{y-1} - \frac{42y}{y+4} + \frac{20y}{y+2} = 0,$$

esto es,

$$\frac{2y(y+4)(y+2) - 42y(y-1)(y+2) + 20y(y-1)(y+4)}{(y-1)(y+4)(y+2)} = 0.$$

Desarrollando el numerador y simplificando, obtenemos que

$$y(2y^2 - 3y - 2) = 0,$$

de donde se sigue que $y = 0$ o $(2y+1)(y-2) = 0$. Por lo tanto, los valores de y son 0 , $-\frac{1}{2}$ y 2 .

Si $y = \log_2 x = 0$, entonces $x = 2^0 = 1$.

Si $y = \log_2 x = -\frac{1}{2}$, entonces $x = 2^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si $y = \log_2 x = 2$, entonces $x = 2^2 = 4$.

Se deja de ejercicio verificar que los tres valores de x son soluciones de la ecuación inicial. ■

Concluimos esta sección con un ejemplo donde la ecuación a resolver no puede ser resuelta con ninguno de los procedimientos estudiados en los ejemplos anteriores.

Ejemplo 5.3.10

Resolver la ecuación $\log(20 - x) = (\log x)^3$.

Solución. Hallemos alguna de sus raíces por el método de selección. Observando que $\log 10 = 1$ y $1^3 = 1$, un candidato para ser raíz es $x = 10$. Sustituyendo este valor en cada lado de la ecuación, obtenemos que $\log(20 - 10) = \log 10 = 1$ y $(\log 10)^3 = 1^3 = 1$. Por lo tanto, hemos encontrado una raíz de la ecuación. Sin embargo, no podemos garantizar que la ecuación esté resuelta, pues es posible que tenga otras raíces. Analicemos el comportamiento de las funciones que aparecen de cada lado de la ecuación. Sean $f(x) = \log(20 - x)$ y $g(x) = (\log x)^3$. En el Ejemplo 5.2.5 vimos que la función $f(x)$ está definida en los números reales

$x < 20$. Por otro lado, la función $\log x$ está definida en los números reales $x > 0$. Luego, las raíces de la ecuación están en el intervalo $(0, 20)$. En este intervalo ya encontramos una raíz ($x = 10$). En el Ejemplo 5.2.5 vimos que los valores de $f(x)$ disminuyen conforme x aumenta. Por otro lado, según la Propiedad (5.2.3), los valores de $g(x)$ aumentan conforme x aumenta. Luego, si la ecuación tiene una raíz, esta es única. Por lo tanto, $x = 10$ es la única raíz de la ecuación. ■

Actividad de Aprendizaje 5.3.11

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

- 1) (S) $\log_4 \frac{2}{x-1} = \log_4(4-x)$.
- 2) (S) $\log_3(x-1)(2x-1) = 0$.
- 3) (S) $\log_{\sqrt{2}} \frac{x^2 - 4x + 3}{4} = -2$.
- 4) (S) $\log(x+1.5) = -\log x$.
- 5) (S) $\log \sqrt{5x-4} + \log \sqrt{x+1} = 2 + \log 0.18$.
- 6) (S) $\log(x^3 + 27) - 0.5 \log(x^2 + 6x + 9) = 3 \log \sqrt[3]{7}$.
- 7) (SA) $\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$.
- 8) (SA) $\log_{1/5}(\log_3 \sqrt{5x}) = 0$.
- 9) (SA) $\log_4(\log_2(\log_3 2x - 1)) = \frac{1}{2}$.
- 10) (SA) $\log_2(x+1)^2 + \log_2 \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 6$.
- 11) (SS) $\log_{x-2}(2x-9) = \log_{x-2}(23-6x)$.
- 12) (SS) $\log_{x+\frac{1}{8}} 2 = \log_x 4$.
- 13) (SS) $2 \log_x 3 + \log_{3x} 3 + 3 \log_{9x} 3 = 0$.
- 14) (SS) $\log_{x+1} \left(x - \frac{1}{2} \right) = \log_{x-\frac{1}{2}}(x+1)$.
- 15) (SS) $\log_{3x+7}(5x+3) + \log_{5x+3}(3x+7) = 2$.

5.4. Ecuaciones exponenciales-logarítmicas

En esta sección trabajaremos con ecuaciones que pueden ser consideradas tanto exponenciales como logarítmicas.

Ejemplo 5.4.1

Resolver la ecuación $x^{1-\log x} = 0.01$.

Solución. Observemos que $x > 0$ para que esté definido $\log x$. Esto implica que $x^{1-\log x} > 0$ y, como $0.01 > 0$, podemos tomar logaritmos de ambos lados de la ecuación. Así, obtenemos la ecuación

$$\log x^{1-\log x} = \log 0.01,$$

equivalente a la ecuación original. Aplicando el inciso 3) de las Propiedades (5.2.15), obtenemos que $\log 0.01 = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$ y $(1 - \log x) \log x = -2$.

Haciendo el cambio de variable $y = \log x$, obtenemos la ecuación $(1 - y)y = -2$, esto es, $y^2 - y - 2 = (y + 1)(y - 2) = 0$ cuyas soluciones son -1 y 2 .

Si $\log x = -1$, entonces $x = 10^{-1} = 0.1$.

Si $\log x = 2$, entonces $x = 10^2 = 100$.

Por lo tanto, las raíces de la ecuación inicial son 0.1 y 100 . ■

Ejemplo 5.4.2

Resolver la ecuación $\log_x(3x^{\log_5 x} + 4) = 2 \log_5 x$.

Solución. Observemos que $x > 0$ para que esté definido $\log_5 x$. Esto implica que $x^{\log_5 x} > 0$. Entonces, podemos aplicar la equivalencia entre la forma logarítmica y la forma exponencial (5.2.6), para reescribir la ecuación dada en la forma

$$x^{2 \log_5 x} = 3x^{\log_5 x} + 4.$$

Haciendo el cambio de variable $y = x^{\log_5 x}$, obtenemos la ecuación cuadrática $y^2 - 3y - 4 = 0$, esto es, $(y - 4)(y + 1) = 0$, cuyas soluciones son 4 y -1 .

La ecuación $x^{\log_5 x} = -1$ no tiene soluciones ya que el lado izquierdo de la ecuación es positivo.

Para resolver la ecuación $x^{\log_5 x} = 4$, podemos tomar logaritmos de ambos lados, lo cual nos da la ecuación equivalente $\log_5 x^{\log_5 x} = \log_5 4$. Aplicando ahora el inciso 3) de las Propiedades (5.2.15), podemos reescribir esta ecuación como $(\log_5 x)^2 = \log_5 4$, de donde $\log_5 x = \pm \sqrt{\log_5 4}$, cuyas soluciones son $5^{\pm \sqrt{\log_5 4}}$. ■

Ejemplo 5.4.3

Resolver la ecuación $\log_5(5^{\frac{1}{x}} + 125) = 1 + \frac{1}{2x} + \log_5 6$.

Solución. Aplicando la Observación (5.2.8), tenemos que $1 + \frac{1}{2x} = \log_5 5^{1+\frac{1}{2x}}$. Entonces, la ecuación a resolver es equivalente a la ecuación

$$\log_5 \left(5^{\frac{1}{x}} + 125 \right) = \log_5 6 + \log_5 5^{1+\frac{1}{2x}}.$$

Aplicando ahora el inciso 1) de las Propiedades (5.2.15) al lado derecho de esta ecuación, obtenemos que

$$\log_5 \left(5^{\frac{1}{x}} + 125 \right) = \log_5 \left(6 \cdot 5 \cdot 5^{\frac{1}{2x}} \right).$$

De acuerdo con el Resultado (5.3.1), las soluciones de esta ecuación logarítmica son las soluciones de la ecuación exponencial $5^{\frac{1}{x}} + 125 = 30 \cdot 5^{\frac{1}{2x}}$, pues ambos lados de esta ecuación son positivos para cualquier valor de $x \neq 0$. Haciendo el cambio de variable $y = 5^{\frac{1}{2x}}$, obtenemos la ecuación cuadrática $y^2 - 30y + 125 = 0$, esto es, $(y - 5)(y - 25) = 0$, cuyas soluciones son 5 y 25. Ahora el problema se ha reducido a resolver cada una de las ecuaciones $5^{\frac{1}{2x}} = 5$ y $5^{\frac{1}{2x}} = 5^2$.

De la primera ecuación, obtenemos que $\frac{1}{2x} = 1$, de donde $x = \frac{1}{2}$.

La segunda ecuación nos proporciona $\frac{1}{2x} = 2$, de donde $x = \frac{1}{4}$.

Por lo tanto, la ecuación original tiene dos raíces: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$. ■

Ejemplo 5.4.4

Resolver la ecuación $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$.

Solución. Observemos que $x > 0$ para que esté bien definida $\sqrt{x}$. Además, x no puede ser igual a 1 ya que la base del logaritmo que aparece en el exponente no puede ser igual a 1. Entonces, aplicando la Equivalencia (5.2.6) entre la forma exponencial y la forma logarítmica, podemos reescribir la ecuación como

$$\log_x 4 = \log_{\sqrt{x}} 2x.$$

Ahora podemos aplicar el inciso 5) de las Propiedades (5.2.15), tomando $n = 2$, al lado derecho de esta ecuación, obteniendo la ecuación equivalente

$$\log_x 4 = \log_x (2x)^2. \quad (5.5)$$

Luego, de acuerdo con el Resultado (5.3.7), las soluciones de esta ecuación son las soluciones de la ecuación $4 = (2x)^2$ que simultáneamente satisfacen las desigualdades: $4 > 0$, $(2x)^2 > 0$, $x > 0$ y $x \neq 1$. Es fácil cerciorarse que las soluciones de la ecuación $4 = (2x)^2$ son $x = \pm 1$, por lo que la ecuación (5.5) no tiene soluciones y, por lo tanto, tampoco tiene soluciones la ecuación original. ■

Ejemplo 5.4.5

Resolver la ecuación $7x^{\frac{1}{(\log_2 x^3)^2} + \log_x 2} = 5 + (x+7)^{\frac{2}{\log_{\sqrt{2}}(x+7)}}$.

Solución. Vamos a reagrupar algunos términos de la ecuación de la siguiente forma

$$(x+7)^{\frac{2}{\log_{\sqrt{2}}(x+7)}} = 7x^{\frac{1}{(\log_2 x^3)^2} + \log_x 2} - 5. \quad (5.6)$$

Observemos que $x > 0$ y $x \neq 1$, ya que x aparece como base de un logaritmo en la ecuación. Esto implica que el lado izquierdo de la ecuación (5.6) es positivo y, en consecuencia, el lado derecho también. Luego, aplicando la Equivalencia (5.2.6), entre la forma exponencial y la forma logarítmica, tenemos la ecuación equivalente

$$\log_{x+7} \left(7x^{\frac{1}{(\log_2 x^3)^2} + \log_x 2} - 5 \right) = \frac{2}{\log_{\sqrt{2}}(x+7)},$$

esto es,

$$\log_{x+7} \left(7x^{\frac{1}{(\log_2 x^3)^2}} \cdot x^{\log_x 2} - 5 \right) = \frac{2}{\log_{\sqrt{2}}(x+7)}.$$

Como $x^{\log_x 2} = 2$ y $\log_{\sqrt{2}}(x+7) = \log_2(x+7)^2 = 2 \log_2(x+7)$, la ecuación anterior la podemos simplificar como

$$\log_{x+7} \left(14x^{\frac{1}{(\log_2 x^3)^2}} - 5 \right) = \frac{1}{\log_2(x+7)}.$$

Usando la fórmula del cambio de base, tenemos que $\log_2(x+7) = \frac{\log_{x+7}(x+7)}{\log_{x+7} 2} = \frac{1}{\log_{x+7} 2}$, por lo que obtenemos la ecuación equivalente

$$\log_{x+7} \left(14x^{\frac{1}{(\log_2 x^3)^2}} - 5 \right) = \log_{x+7} 2.$$

Para resolver esta ecuación logarítmica aplicamos el Resultado (5.3.7), esto es, debemos resolver la ecuación exponencial

$$14x^{\frac{1}{(\log_2 x^3)^2}} - 5 = 2.$$

Simplificando obtenemos que $x^{\frac{1}{(\log_2 x^3)^2}} = \frac{1}{2}$, o de forma equivalente, $\log_x \frac{1}{2} = \frac{1}{(\log_2 x^3)^2} = \frac{1}{(3 \log_2 x)^2} = \frac{1}{9(\log_2 x)^2}$. Cambiando $\log_x \frac{1}{2}$ a base 2, obtenemos que

$$\frac{\log_2 \frac{1}{2}}{\log_2 x} = \frac{1}{9(\log_2 x)^2},$$

esto es,

$$\frac{-1}{\log_2 x} = \frac{1}{9(\log_2 x)^2},$$

ya que $\log_2 \frac{1}{2} = -1$.

Haciendo $y = \log_2 x$, obtenemos la ecuación cuadrática $9y^2 + y = 0$, cuyas soluciones son 0 y $-\frac{1}{9}$.

Si $\log_2 x = 0$, entonces $x = 2^0 = 1$, lo cual no puede ser.

Si $\log_2 x = -\frac{1}{9}$, entonces $x = 2^{-1/9}$. Es fácil cerciorarse que con este valor de x se satisfacen las desigualdades $14x^{\frac{1}{(\log_2 x^3)^2}} - 5 > 0$, $2 > 0$, $x + 7 > 0$ y $x + 7 \neq 1$, por lo que $2^{-1/9}$ es la única solución de la ecuación original. ■

Actividad de Aprendizaje 5.4.6

1) Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) (S) $x^{\log x} = 1000x^2$.

b) (S) $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$.

c) (S) $16^{\log_x 2} = 8x$.

d) (S) $5^{\log x} - 3^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} - 5^{\log x - 1}$.

e) (S) $2x^{\log x} + 3x^{-\log x} = 5$.

f) (SA) $x^{(\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x} = 3^{8 - 3 \log_2 \sqrt{2}^4}$.

g) (SA) $x^{(\log_2 x^2)^2 - \log_2 (2x - 2)} + (x + 2)^{\log_{(x+2)^2} 4} = 3$.

h) (SA) $\log(3^x - 2^{4-x}) = 2 + 0.25 \log 16 - 0.5x \log 4$.

i) (SA) $\log_2(9 - 2^x) = 25^{\log_5 \sqrt{3-x}}$.

j) (SA) $3 \log 2 + \log(2^{\sqrt{x-1}-1} - 1) = \log(0.4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}} + 4) + 1$.

Actividad de Aprendizaje 5.4.6 (Continuación)

- k) (SA) $4^{\log_3(1-x)} = (2x^2 + 2x + 5)^{\log_3 2}$.
- l) (SA) $x^{\log_2 \frac{5}{8}} \cdot 14^{\log_2 7} = 1$.
- m) (SS) $3x + (3 - x) \log_3 2 = \log_3 \left(9 \left(\frac{8}{3} \right)^x + 2 \cdot 6^x \right) + 1$.
- n) (SS) $x^2 \log_6 (5x^2 - 2x - 3) - x \log_{\frac{1}{6}} (5x^2 - 2x - 3) = x^2 + x$.
- ñ) (SS) $x^2 \log_2 \frac{3+x}{10} - x^2 \log_{\frac{1}{2}} (2+3x) = x^2 - 4 + 2 \log_{\sqrt{2}} \frac{3x^2 + 11x + 6}{10}$.
- 2) Determina las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Utiliza los mismos procedimientos para resolver un sistema de ecuaciones algebraicas. En muchos casos, antes de aplicar uno u otro método para resolver el sistema, es preciso transformar cada ecuación del sistema a su forma más sencilla.
- a) (SA) $x^{\log_y x} \cdot y = x^{5/2}, \log_4 y \cdot \log_y (y - 3x) = 1$.
- b) (SA) $\log x + \log y = \log 2, x^2 + y^2 = 5$.
- c) (SA) $x^{y-2} = 4, x^{2y-3} = 64$.
- d) (SA) $\log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}, xy = 16$.
- e) (SA) $x^{y+1} = 27, x^{2y-5} = \frac{1}{3}$.
- f) (SA) $\log(x^2 + y^2) - 1 = \log 13, \log(x + y) - \log(x - y) = 3 \log 2$.
- g) (SA) $2^x \cdot 4^y = 32, \log(x - y)^2 = 2 \log 2$.
- h) (SA) $2^{(x-y)/2} - (\sqrt[4]{2})^{x-y} = 12, 3^{\log(2y-x)} = 1$.
- i) (SA) $\log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, x^y = 5^{12}$.
- j) (SA) $x^y = y^x, x^x = y^{9y}, (x > 0, y > 0)$.

CAPÍTULO 6

ÁLGEBRA MATRICIAL

El álgebra matricial se centra en el estudio de las matrices y las operaciones que se pueden realizar con ellas. Una matriz es un objeto matemático que permite organizar información numérica (y de otros tipos) de un modo natural y sencillo. La idea consiste en disponer números en forma de tabla, con una estructura de filas y columnas, de manera que cada número de la tabla pueda ser identificado mediante su posición: la fila y la columna en las que está situado el número. Esta disposición en forma de tabla con filas y columnas, puede no resultar muy audaz, ya que es algo realmente natural, casi obvio, por lo que posiblemente no se perciba a las matrices como un “gran invento”. Sin embargo, la sencillez de este concepto permite que sean utilizadas en casi todos los ámbitos del saber científico: física, sociología, astronomía, ingeniería, entre tantos otros. Dentro del campo de las matemáticas, se utilizan como instrumentos muy útiles en todas sus disciplinas: cálculo, estadística, geometría, lógica, criptografía, álgebra, probabilidad, etc. Esta gran versatilidad, a pesar de ser objetos tan simples, se debe a que el conjunto de las matrices posee una estructura sencilla y muy poderosa, que consiste fundamentalmente en la posibilidad de realizar diversas operaciones con matrices. Estas operaciones se “comportan” conforme a unas pocas propiedades (familiares y naturales, en la mayor parte de los casos), de manera que las operaciones junto con sus propiedades son las que proporcionan esta estructura y abren todo un universo de aplicaciones. Para abordar con éxito este capítulo, es suficiente conocer los diversos conjuntos numéricos, sus operaciones y sus propiedades.

6.1. Definiciones y notaciones

A lo largo de todo este capítulo, denotaremos con la letra K al conjunto de los números reales o números complejos.

Si m y n son enteros positivos, una **matriz** A de (tamaño) $m \times n$ con entradas en K es un arreglo rectangular de mn elementos de K ordenados en m renglones (filas) horizontales y n columnas verticales, encerrados entre paréntesis o entre corchetes. En este libro usaremos la notación de los corchetes.

$$\begin{array}{c}
 \text{columna } j \\
 \downarrow \\
 A = \left[\begin{array}{cccccc}
 a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\
 a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n}
 \end{array} \right] \quad \leftarrow \text{ renglón } i
 \end{array}$$

Cuando una matriz es de tamaño 1×1 , usualmente no se escriben los paréntesis ya que la matriz se identifica con el número. Así, en lugar de escribir $[a_{1,1}]$ simplemente escribimos el número $a_{1,1}$.

Ejemplo 6.1.1

Una matriz de 2×2 con entradas en K es un arreglo de dos renglones y dos columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}.$$

En particular, las siguientes matrices son de 2×2 .

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1+2i & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las entradas de la matriz B son números complejos y las entradas de la matriz C son números reales.

Ejemplo 6.1.2

Una matriz de 2×3 con entradas en K es un arreglo de dos renglones y tres columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}.$$

En particular, las siguientes matrices son de 2×3 .

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ambas con entradas en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 6.1.3

Una matriz de 3×2 con entradas en K es un arreglo de tres renglones y dos columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}.$$

En particular, las siguientes matrices son de 3×2 .

$$B = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & 1+i \\ \frac{2}{3}+5i & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hay diferentes maneras de referirse en forma abreviada a una matriz. Podemos escribir $A = [a_{i,j}]_{m \times n}$ o simplemente $A = [a_{i,j}]$ para indicar que el elemento en la entrada (i, j) es $a_{i,j}$. También es frecuente usar la notación $[A]_{i,j}$ para denotar al elemento en la entrada (i, j) .

Si $A = [a_{i,j}]$ es una matriz de $m \times n$, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, el i -ésimo renglón de A es:

$$A_{i*} = [a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \cdots \quad a_{i,j} \quad \cdots \quad a_{i,n}]$$

y, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, la j -ésima columna de A es:

$$A_{*j} = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix}.$$

Si $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ denotan las columnas de la matriz A , escribimos

$$A = [A_{*1} \mid A_{*2} \mid \dots \mid A_{*n}].$$

También se puede escribir

$$A = \begin{bmatrix} A_{1*} \\ A_{2*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{bmatrix},$$

donde $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ denotan los renglones de la matriz A .

Cuando una matriz tiene una sola columna, se llama **vector columna** y, si tiene un único renglón, se llama **vector renglón**.

Algunas matrices tienen una estructura particular por lo que reciben nombres especiales.

- 1) Una matriz $A = [a_{i,j}]$ de $m \times n$ es una matriz **cuadrada** de orden n si $m = n$. Los elementos $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ forman la **diagonal principal** de A .
- 2) Una matriz cuadrada $D = [d_{i,j}]$ de orden n es una **matriz diagonal** si $d_{i,j} = 0$ para $i \neq j$. Si D es una matriz diagonal, se escribe $D = \text{diag}[d_{1,1}, \dots, d_{n,n}]$.
- 3) La **matriz identidad** de $n \times n$ denotada por I_n o simplemente I , es la matriz $I = [\delta_{i,j}]$, donde

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

- 4) Una matriz cuadrada U es **triangular superior** si $[U]_{i,j} = 0$ cuando $i > j$, esto es, si todas las entradas debajo de la diagonal principal son cero.
- 5) Una matriz cuadrada L es **triangular inferior** si $[L]_{i,j} = 0$ cuando $i < j$, esto es, si todas las entradas arriba de la diagonal principal son cero.
- 6) A una matriz de $m \times n$ que tiene ceros en todas sus entradas se le llama **matriz cero** o **matriz nula** y se denota por $0_{m,n}$.

Ejemplo 6.1.4

Las matrices $D_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ y $D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, son matrices diagonales.

Ejemplo 6.1.5

Toda matriz diagonal es una matriz triangular inferior y triangular superior.

Ejemplo 6.1.6

Las siguientes matrices son triangulares.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz A es triangular superior y la matriz B es triangular inferior.

Ejemplo 6.1.7

La matriz I_2 es la matriz identidad de orden 2 y la matriz I_3 es la matriz identidad de orden 3.

$$I_2 = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \delta_{1,3} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} \\ \delta_{3,1} & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 6.1.8

Las matrices

$$0_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_{3,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

son matrices nulas de tamaños 2×3 , 2×2 y 3×3 , respectivamente.

Igualdad de matrices (6.1.9)

Si $A = [a_{i,j}]$ y $B = [b_{i,j}]$ son matrices de tamaños $m \times n$ y $r \times s$, entonces decimos que $A = B$ si $m = r$, $n = s$ y $a_{i,j} = b_{i,j}$ para cada $i = 1, 2, \dots, m$ y para cada $j = 1, 2, \dots, n$.

En otras palabras, $A = B$ si A y B son del mismo tamaño y tienen exactamente las mismas entradas.

Ejemplo 6.1.10

Las matrices identidad I_2 e I_3 no son iguales porque tienen tamaños distintos. La matriz I_2 es de 2×2 y la matriz I_3 es de 3×3 .

Ejemplo 6.1.11

Determinar si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -3 & -12 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -3 & -12 \end{bmatrix}$ son iguales.

Solución. Ambas matrices son de tamaño 3×3 , esto es, tienen el mismo número de renglones que de columnas. Así que la primera condición para la igualdad de matrices se satisface.

Ahora verificaremos la condición de los elementos correspondientes. Observamos que $[A]_{1,1} = 2 \neq -1 = [B]_{1,1}$, lo que significa que $A \neq B$. Más aún, las entradas en la posición $(1, 1)$ de ambas matrices son las únicas entradas que no coinciden.



Ejemplo 6.1.12

Si las matrices $A = [a + b \quad 6 \quad 8 \quad 2c \quad 3b]$ y $B = [3 \quad 6 \quad 8 \quad 14 \quad 9]$ son iguales, determinar los valores de a , b y c .

Solución. Notemos que A y B son matrices de 1×5 . Entonces, $A = B$ si $a + b = 3$, $2c = 14$ y $3b = 9$. De aquí obtenemos que $c = 7$ y $b = 3$, por lo que $a + 3 = 3$. Por lo tanto, $a = 0$. ■

Ejemplo 6.1.13

Determinar el valor de $a + b$ si $\begin{bmatrix} 2a + b & 4a \\ 5a - 7 & 4a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7b - 13 \\ b & a + 6 \end{bmatrix}$.

Solución. Puesto que tenemos una igualdad entre dos matrices del mismo tamaño, sus entradas deben ser las mismas. Entonces, $2a + b = 7$, $4a = 7b - 13$, $5a - 7 = b$ y $4a = a + 6$. De la última igualdad obtenemos que $a = 2$. Sustituyendo esta valor en la primera igualdad, resulta que $4 + b = 7$, de donde $b = 3$. Por lo tanto, $a + b = 5$. ■

Transpuesta de una matriz (6.1.14)

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $m \times n$, la **transpuesta** de A , denotada por A^T , es la matriz de $n \times m$ definida como sigue

$$A^T = [a_{ji}], \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

En otras palabras, la matriz A^T se obtiene intercambiando los renglones por las columnas de A .

Ejemplo 6.1.15

La transpuesta de $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 8 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ es $M^T = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Observa que los renglones de la matriz M ahora son las columnas de la matriz M^T .

Ejemplo 6.1.16

Si $A = \begin{bmatrix} 3-2i & -5 & 6 \\ 1+i & 2 & 7 \\ 1+2i & 2-3i & 1 \end{bmatrix}$, entonces $A^T = \begin{bmatrix} 3-2i & 1+i & 1+2i \\ -5 & 2 & 2-3i \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. Observa que las columnas de la matriz A son los renglones de la matriz A^T .

Ejemplo 6.1.17

Si $x = [a_1 \ \dots \ a_n]$ es un vector renglón, entonces x^T se convierte en el vector columna

$$x^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Recíprocamente, si x es un vector columna, entonces x^T es un vector renglón.

Ejemplo 6.1.18

Si $A = [a_{i,j}]$, las entradas en cada renglón de A^T son las correspondientes entradas en las columnas de A . Así, si $A = [A_{*1} \mid \dots \mid A_{*n}]$, entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} A_{*1}^T \\ \vdots \\ A_{*n}^T \end{bmatrix},$$

donde A_{*j}^T denota la transpuesta de la columna j de la matriz A , para cada $j = 1, \dots, n$.

Si $A = \begin{bmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{bmatrix}$, entonces $A^T = [A_{1*}^T \mid \dots \mid A_{m*}^T]$, donde A_{i*}^T denota la transpuesta del renglón i de la matriz A , para cada $i = 1, \dots, m$.

En cualquier caso, tenemos que $A^T = [a_{j,i}]$, esto es,

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 6.1.19 Doble transpuesta

Sea $A = [a_{i,j}]$ una matriz de $m \times n$. Por definición de matriz transpuesta, tenemos que $A^T = [a_{j,i}]$ es una matriz de $n \times m$. Aplicando ahora la definición de matriz transpuesta a la matriz A^T , obtenemos que $(A^T)^T = [a_{i,j}]$, lo que significa que $(A^T)^T = A$.

Traza de una matriz (6.1.20)

Sea $A = [a_{i,j}]$ una matriz de orden n . La **traza** de A se define como la suma de los elementos de su diagonal y se denota por $\text{tr}(A)$. Esto es,

$$\text{tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n} = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Ejemplo 6.1.21

$$\text{tr} \begin{bmatrix} 10 & -29 & 0 \\ -2 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & 15 \end{bmatrix} = 10 - 5 + 15 = 20.$$

Ejemplo 6.1.22

Si $A = [a_{i,j}]$ es una matriz de orden n , entonces la diagonal principal de A es igual a la diagonal principal de A^T y, por lo tanto, $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$.

Actividad de Aprendizaje 6.1.23

- 1) (S) Da un ejemplo de una matriz de 2×4 y un ejemplo de una matriz de 4×2 .
- 2) (S) Escribe explícitamente a la matriz $[a_{i,j}]$ de tamaño 2×3 cuyas entradas son: $a_{1,1} = 2$, $a_{2,1} = 6$, $a_{1,3} = 1$, $a_{2,2} = 5$, $a_{2,3} = 3$ y $a_{1,2} = 4$.
- 3) (S) Escribe explícitamente a la matriz $[a_{i,j}]$ de tamaño 2×3 en cada uno de los siguientes casos:
 - a) $a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$.
 - b) $a_{i,j} = i + 2j$.
 - c) $a_{i,j} = ij$.

- 4) (S) Determina los valores de x, y que satisfagan la igualdad

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 5 & 4 \\ -3 & 13 & 15 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 2x+1 & 4 \\ -3 & 13 & 15 & 3x \\ 0 & 2 & 3y-5 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 5) (S) Determina la matriz A que satisfaga la siguiente igualdad

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & i & -1 \\ i-1 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} = A^T.$$

- 6) (SA) Sea A una matriz de orden n . Explica qué tipo de matriz debe ser A para que sea al mismo tiempo triangular superior y triangular inferior.
- 7) (S) Determina la traza de la matriz identidad de orden n .
- 8) (SA) Da un ejemplo de una matriz de orden 3 y de una matriz de orden 4 que tengan la misma traza.
- 9) (SA) Da un ejemplo de una matriz que sea igual a su transpuesta y que no sea una matriz diagonal.
- 10) (SA) Sea c un número real o complejo. Si $A = [a_{i,j}]$ y $B = [ca_{i,j}]$, determina $\text{tr}(B)$ en función de $\text{tr}(A)$.

Actividad de Aprendizaje 6.1.23 (Continuación)

- 11) (SA) Si $A = [a_{i,j}]$ es una matriz de orden n cuyas entradas son números complejos, definimos la matriz **conjugada** de A , denotada por $\overline{A}$, como $\overline{A} = [\overline{a_{i,j}}]$. Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 2-i \end{bmatrix}$, entonces $\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{i} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{2-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & 2+i \end{bmatrix}$. ¿Será cierto que $(\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$? Justifica tu respuesta.
- 12) (SS) Sea $A = [a_{i,j}]$ una matriz de orden 3. Determina A si $A = A^T$.
- 13) (SS) Sea $A = [a_{i,j}]$ una matriz de orden 3 y sea $B = [-a_{i,j}]$. Determina A si $A = B^T$.
- 14) (SS) Si A y B son matrices de $m \times n$ tales que $A^T = B^T$, ¿se puede concluir que $A = B$? Justifica tu respuesta.

6.2. Suma de matrices y producto de matriz por escalar

Dos matrices del mismo tamaño se pueden sumar para producir otra matriz del mismo tamaño. La suma se realiza entrada a entrada. El producto de una matriz por un escalar se realiza multiplicando cada entrada de la matriz por el escalar, obteniendo una matriz del mismo tamaño que la matriz original. De manera formal tenemos lo siguiente.

Suma de matrices y producto de matriz por escalar (6.2.1)

Sean $A = [a_{i,j}]$ y $B = [b_{i,j}]$ matrices de $m \times n$ con entradas en K .

- 1) La **suma** de las matrices A y B , denotada por $A + B$, es la matriz

$$A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}].$$

En forma desarrollada, tenemos que

$$\begin{aligned}
 A + B &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

- 2) Si c es un número real o complejo, el **producto de A por el escalar c** , denotado por cA , es la matriz $cA = [ca_{i,j}]$. En forma desarrollada, tenemos que

$$cA = c \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{1,1} & ca_{1,2} & \dots & ca_{1,n} \\ ca_{2,1} & ca_{2,2} & \dots & ca_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m,1} & ca_{m,2} & \dots & ca_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Observación 6.2.2

- 1) La suma de matrices no está definida si las matrices no son del mismo tamaño.
- 2) Escribimos $-A$ en lugar de $(-1)A$. De esta manera, la resta $A - B$ representa la suma $A + (-1)B$, cuando A y B tienen el mismo tamaño.

Ejemplo 6.2.3

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 0+0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 6.2.4

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+1 & 0+2 & 0+3 \\ 0+1 & 1+2 & 1+3 & 0+4 \\ 0+2 & 0+3 & 1+4 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

mientras que la suma $I_3 + A$ no está definida ya que I_3 y A tienen tamaños distintos.

Ejemplo 6.2.5

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$, entonces

$$\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}B = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 2 & 5/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/4 & 3/2 \\ 2 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-7/4 & -3/2-3/2 \\ 2-2 & 5/2-1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 & -3 \\ 0 & 9/4 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 6.2.6

Si $A = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 15 & 19 & 0 \\ 14 & -7 & -1 \\ 22 & 13 & 8 \end{bmatrix}$, resolver la ecuación matricial $A - X = B$.

Solución. Sea $X = [x_{i,j}]$. Observamos que la matriz X debe ser del mismo tamaño que la matriz A . Entonces,

$$A - X = \begin{bmatrix} -3 - x_{1,1} & 7 - x_{1,2} & 2 - x_{1,3} \\ -2 - x_{2,1} & -x_{2,2} & -1 - x_{2,3} \\ 3 - x_{3,1} & 4 - x_{3,2} & -x_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Como $A - X = B$, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} -3 - x_{1,1} &= 15, & 7 - x_{1,2} &= 19, & 2 - x_{1,3} &= 0, \\ -2 - x_{2,1} &= 14, & -x_{2,2} &= -7, & -1 - x_{2,3} &= -1, \\ 3 - x_{3,1} &= 22, & 4 - x_{3,2} &= 13, & -x_{3,3} &= 8, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $x_{1,1} = -18$, $x_{1,2} = -12$, $x_{1,3} = 2$, $x_{2,1} = -16$, $x_{2,2} = 7$, $x_{2,3} = 0$, $x_{3,1} = -19$, $x_{3,2} = -9$ y $x_{3,3} = -8$. Por lo tanto,

$$X = \begin{bmatrix} -18 & -12 & 2 \\ -16 & 7 & 0 \\ -19 & -9 & -8 \end{bmatrix}.$$



Ejemplo 6.2.7 Traza de una suma de matrices

Si $A = [a_{i,j}]$ y $B = [b_{i,j}]$ son matrices de orden n , entonces la diagonal de $A + B$ tiene a los números $a_{1,1} + b_{1,1}, a_{2,2} + b_{2,2}, \dots, a_{n,n} + b_{n,n}$, por lo que

$$\text{tr}(A + B) = \sum_{i=1}^n (a_{i,i} + b_{i,i}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \sum_{i=1}^n b_{i,i} = \text{tr}(A) + \text{tr}(B).$$

Ejemplo 6.2.8 Traza del producto de matriz por escalar

Si $A = [a_{i,j}]$ es una matriz de orden n y c es un número real o complejo, entonces la diagonal de cA tiene a los números $ca_{1,1}, ca_{2,2}, \dots, ca_{n,n}$, por lo que

$$\text{tr}(cA) = \sum_{i=1}^n (ca_{i,i}) = c \sum_{i=1}^n a_{i,i} = c \text{tr}(A).$$

Ejemplo 6.2.9 La suma de matrices es conmutativa

Si $A = [a_{i,j}]$ y $B = [b_{i,j}]$ son matrices de $m \times n$ con entradas en K , entonces

$$A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}] = [b_{i,j} + a_{i,j}] = B + A.$$

Observa que la conmutatividad de la suma en $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, hereda la conmutatividad de la suma de matrices.

Ejemplo 6.2.10 La suma de matrices es asociativa

Si $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ y $C = [c_{ij}]$ son matrices de $m \times n$ con entradas en K , entonces

$$\begin{aligned}
 [(A + B) + C]_{ij} &= [A + B]_{ij} + [C]_{ij} && \text{(definición de suma de matrices)} \\
 &= ([A]_{ij} + [B]_{ij}) + [C]_{ij} && \text{(definición de suma de matrices)} \\
 &= [A]_{ij} + ([B]_{ij} + [C]_{ij}) && \text{(asociatividad de la suma en } K) \\
 &= [A]_{ij} + [B + C]_{ij} && \text{(definición de suma de matrices)} \\
 &= [A + (B + C)]_{ij} && \text{(definición de suma de matrices)}
 \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, m$ y para $j = 1, \dots, n$.

Esto significa que $(A + B) + C = A + (B + C)$; en otras palabras, la suma de matrices con entradas en $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ es asociativa.

A continuación listamos los resultados de los Ejemplos 6.2.9 y 6.2.10 junto con otras propiedades de la suma de matrices y del producto de matriz por escalar.

Propiedades de la suma de matrices y del producto de matriz por escalar (6.2.11)

Si A , B y C son matrices de $m \times n$ y a , b son números reales o complejos, entonces

- 1) Ley conmutativa de la suma: $A + B = B + A$.
- 2) Ley asociativa de la suma: $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- 3) $A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A = A$.
- 4) $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m,n}$.
- 5) $(a + b)A = aA + bA$.
- 6) $a(A + B) = aA + aB$.
- 7) $a(bA) = (ab)A$.
- 8) $1A = A$.

Ejemplo 6.2.12

La ecuación $A - X = B$ del Ejemplo 6.2.6, se puede resolver de otra forma utilizando las Propiedades (6.2.11). Tenemos que

$$\begin{aligned}
 A - X &= B \\
 (A - X) + X &= B + X && \text{(sumando de ambos lados la matrix } X) \\
 A + (-X + X) &= B + X && \text{(ley asociativa de la suma)} \\
 A + 0_{3,3} &= B + X && \text{(Propiedad (6.2.11)-4)} \\
 A &= B + X && \text{(Propiedad (6.2.11)-3)} \\
 -B + A &= -B + (B + X) && \text{(sumando de ambos lados la matriz } -B) \\
 A - B &= (-B + B) + X && \text{(leyes conmutativa y asociativa de la suma)} \\
 A - B &= 0_{3,3} + X && \text{(Propiedad (6.2.11)-4)} \\
 A - B &= X && \text{(Propiedad (6.2.11)-3).}
 \end{aligned}$$

Combinación lineal (6.2.13)

Una matriz A de $m \times n$ con entradas en K es una **combinación lineal** de otras matrices $M_1, \dots, M_k$, si A se puede escribir en la forma

$$A = c_1 M_1 + \dots + c_k M_k,$$

donde $c_1, \dots, c_k$ son escalares, esto es, son elementos de K .

Ejemplo 6.2.14

Si $x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, entonces $x = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En otras palabras, el vector x es combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 6.2.15

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $A = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. En otras palabras, la matriz A es combinación lineal de las matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Transpuesta de una suma de matrices y del producto de matriz por escalar (6.2.16)

Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices de $m \times n$ y c es un número real o complejo, entonces para cada $i = 1, \dots, m$ y para cada $j = 1, \dots, n$,

$$[(A+B)^T]_{ij} = [A+B]_{ji} = [A]_{ji} + [B]_{ji} = [A^T]_{ij} + [B^T]_{ij} = [A^T + B^T]_{ij}$$

y

$$[(cA)^T]_{ij} = [cA]_{ji} = c[A]_{ji} = c[A^T]_{ij} = [cA^T]_{ij},$$

lo que significa que

$$1) (A+B)^T = A^T + B^T.$$

$$2) (cA)^T = cA^T.$$

Ejemplo 6.2.17

Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1+x & 0 \\ 5x-2y & 1-y \end{bmatrix}$, determinar los valores de x, y tales que se cumpla la igualdad $A^T + B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución. Aplicando la Propiedad (6.2.16)-1), tenemos que

$$A^T + B^T = (A+B)^T = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 5x-2y & 3-y \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x & 5x-2y \\ 1 & 3-y \end{bmatrix},$$

por lo que $\begin{bmatrix} x & 5x - 2y \\ 1 & 3 - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, esto es, $x = 1$, $3 - y = 1$ y $5x - 2y = 1$.
 Por lo tanto, $x = 1$ y $y = 2$. ■

Ejemplo 6.2.18

Si $A = \begin{bmatrix} i & 2i & 3i \\ -i & -2i & -3i \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1+i & 4i \\ 2 & 5 \\ 3-i & 6 \end{bmatrix}$, determinar $(iA + B^T)^T$.

Solución. Aplicando la Propiedad (6.2.16)-1), tenemos que

$$(iA + B^T)^T = (iA)^T + (B^T)^T.$$

Aplicando ahora el resultado del Ejemplo 6.1.19, obtenemos que $(B^T)^T = B$ y, por la Propiedad (6.2.16)-2), resulta que $(iA)^T = iA^T$. Por lo tanto,

$$(iA + B^T)^T = iA^T + B = i \begin{bmatrix} i & -i \\ 2i & -2i \\ 3i & -3i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+i & 4i \\ 2 & 5 \\ 3-i & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1+4i \\ 0 & 7 \\ -i & 9 \end{bmatrix}.$$

■

Ejemplo 6.2.19 Matriz simétrica

Sea A una matriz cuadrada. De acuerdo con la Propiedad (6.2.16)-1), tenemos que

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A,$$

donde la última igualdad se sigue por el resultado del Ejemplo 6.1.19.

Como la suma de matrices es conmutativa, se sigue que $A^T + A = A + A^T$ y, por lo tanto, $(A + A^T)^T = A + A^T$.

Una matriz cuadrada que es igual a su transpuesta se llama **matriz simétrica**. Este ejemplo muestra que $A + A^T$ es una matriz simétrica para cualquier matriz cuadrada A .

Ejemplo 6.2.20 Matriz antisimétrica

Sea A una matriz cuadrada. De acuerdo con la Propiedad (6.2.16)-1), tenemos que

$$(A - A^T)^T = A^T + (-A^T)^T = A^T + (-(A^T)^T),$$

donde la última igualdad se sigue por la Propiedad (6.2.16)-2). Aplicando el resultado del Ejemplo 6.1.19, concluimos que $(A - A^T)^T = A^T - A$, esto es, $(A - A^T)^T = -(A - A^T)$.

Una matriz cuadrada A que satisface la igualdad $A = -A^T$ se llama **matriz antisimétrica**. Este ejemplo muestra que $A - A^T$ es una matriz antisimétrica para cualquier matriz cuadrada A .

Actividad de Aprendizaje 6.2.21

- 1) (S) Si $P = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$ y $2P - Q = R$, determina los valores de w, x, y y z .
- 2) (S) Si $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, determina la matriz $3I_2 - A$.
- 3) (S) Determina tres matrices A, B y C tales que $A + B + C = 0_{2,3}$.
- 4) (S) Expresa al vector $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ como combinación lineal de otros vectores. Utiliza la idea del Ejemplo 6.2.14.
- 5) (S) Expresa a la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -4 \\ 7 & -1 & 1 & -2 \\ 8 & 9 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ como combinación lineal de otras matrices. Utiliza la idea del Ejemplo 6.2.15.
- 6) (S) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. Determina un escalar α tal que $A + \alpha B = C$.
- 7) (S) Determina todos los números x tales que

$$x \begin{bmatrix} 2x & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 8 & 5x \\ 4 & 4x \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x^2 + 8 & 24 \\ 10 & 6x \end{bmatrix}.$$
- 8) (S) Determina una matriz C tal que $3A + 5B + 2C$ sea la matriz nula de orden 2, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

- 9) (SA) Si A y B son matrices diagonales de orden n , ¿es también diagonal la matriz $A + 2B$? Justifica tu respuesta.
- 10) (SA) Resuelve la ecuación matricial $2A + 3X = -4A$, si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.
- 11) (SA) Determina todas las matrices A y B tales que $A - B = B - A$.
- 12) (SA) Determina dos matrices A y B tales que $A - 3B = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
y $2A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- 13) (SA) Simplifica las siguientes operaciones con matrices.
- a) $2[9(A - B) + 7(2B - A)] - 2[3(2B + A) - 2(A + 3B) - 5(A + B)]$.
- b) $5[3(A - B + 2C) - 2(3C - B) - A] + 2[3(3A - B + C) + 2(B - 2A) - 2C]$.
- 14) (SA) En cada caso determina la matriz A .
- a) $\left(A + 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.
- b) $\left(3A^T + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.
- 15) (SA) Si A y B son matrices simétricas del mismo tamaño, determina si la matriz $A^T + 3B$ es simétrica. (Ver Ejemplo 6.2.19 para la definición de matriz simétrica).
- 16) (SA) Determina todas las matrices que son al mismo tiempo simétricas y antisimétricas.
- 17) (SA) Expresa al vector $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ como combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Compara tu resultado con el Ejemplo 6.2.14.
- 18) (SS) Justifica los incisos 3), 4), 5), 6), 7) y 8) de la lista de Propiedades (6.2.11).
- 19) (SS) Si A es una matriz simétrica de orden 2, expresa a A como combinación lineal de otras matrices simétricas. Compara tu resultado con el Ejemplo 6.2.15.

Actividad de Aprendizaje 6.2.21 (Continuación)

- 20) (SS) Si A es una matriz de orden n que satisface la igualdad $A = 2A^T$, determina la matriz A .
- 21) (SS) Si A es una matriz de orden n , determina una expresión para A como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. (Los Ejemplos 6.2.19 y 6.2.20 pueden ser útiles).

6.3. Multiplicación de matrices

Una de las operaciones más importantes que se realiza con las matrices es la multiplicación de matrices. A primera vista esto se hace de una manera un poco extraña. La razón de esto solo se vuelve evidente cuando se utilizan las matrices para resolver sistemas de ecuaciones.

Comenzaremos multiplicando una matriz de 1×2 por una matriz de 2×1 . Si $A = [a \ b]$ y $B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, entonces el producto AB es la matriz de 1×1 definida por

$$AB = [a \ b] \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd.$$

Podemos observar que hemos emparejado los elementos en la fila de la matriz A con los elementos en la columna de la matriz B , para luego multiplicar los elementos emparejados y sumar los resultados.

Por ejemplo, tenemos que

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 2(6) + (-3)(5) = 12 - 15 = -3.$$

Este producto de matrices lo podemos generalizar fácilmente usando otra matriz renglón y otra matriz columna. Por ejemplo, si C es una matriz de 1×4 y D es una matriz de 4×1 ,

$$C = [2 \quad -4 \quad 3 \quad 2], \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

entonces

$$CD = [2 \quad -4 \quad 3 \quad 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = 6 - 12 - 6 + 10 = -2.$$

El único requisito para poder emparejar es que el número de entradas de la matriz renglón sea igual al número de entradas de la matriz columna.

De manera formal tenemos lo siguiente.

Producto de matriz renglón por matriz columna (6.3.1)

Si $[a_{1,i}]$ es una matriz de $1 \times n$ y $[b_{i,1}]$ es una matriz de $n \times 1$, entonces el producto $[a_{1,i}][b_{i,1}]$ es una matriz de 1×1 y está definido por

$$[a_{1,i}][b_{i,1}] = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \cdots + a_{1,n}b_{n,1} = \sum_{i=1}^n a_{1,i}b_{i,1}.$$

Esta misma idea es la que se usa para generalizar el producto de matrices cuando las matrices son de diversos tamaños: multiplicar cada renglón de la primera matriz por cada columna de la segunda, siempre y cuando se puedan emparejar las entradas de los renglones de la primera matriz con las entradas de las columnas de la segunda matriz. En otras palabras, si A es una matriz de $m \times n$ y B es una matriz de $n \times p$, el producto AB está definido si $n = r$ y, en este caso, la matriz AB es de tamaño $m \times p$. De manera formal tenemos lo siguiente.

Multiplicación de matrices (6.3.2)

Si $A = [a_{i,j}]$ es una matriz de $m \times n$ y $B = [b_{j,k}]$ es una matriz de $n \times p$, entonces el producto AB es una matriz de $m \times p$ y está definido por

$$[AB]_{i,k} = A_{i*}B_{*k} = a_{i,1}b_{1,k} + a_{i,2}b_{2,k} + \cdots + a_{i,n}b_{n,k} = \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,k}$$

para cada $i = 1, \dots, m$ y para cada $k = 1, \dots, p$.

En otras palabras, la entrada (i, k) de AB se obtiene multiplicando el renglón i de A por la columna k de B como se definió en (6.3.1).

Observación 6.3.3

1) A partir de la definición del producto de matrices (6.3.2), podemos escri-

bir a la matriz producto AB por columnas como sigue

$$AB = [AB_{*1} \mid AB_{*2} \mid \dots \mid AB_{*p}].$$

En otras palabras, la j -ésima columna del producto AB se obtiene multiplicando la matriz A por la j -ésima columna de la matriz B , esto es, $(AB)_{*j} = AB_{*j}$.

2) Si $x = [x_i]$ es un vector columna de $n \times 1$, entonces

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} A_{1*}x \\ A_{2*}x \\ \vdots \\ A_{m*}x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} \\ &= x_1 A_{*1} + x_2 A_{*2} + \dots + x_n A_{*n}. \end{aligned}$$

Tenemos dos formas fundamentalmente distintas para el producto de matriz por vector columna.

- El producto Ax en función de los renglones de A es

$$Ax = \begin{bmatrix} A_{1*}x \\ A_{2*}x \\ \vdots \\ A_{m*}x \end{bmatrix}.$$

- El producto Ax en función de las columnas de A es

$$Ax = x_1 A_{*1} + x_2 A_{*2} + \dots + x_n A_{*n}.$$

Ejemplo 6.3.4

Obtener el producto AB si $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución. Observemos que se puede realizar el producto AB ya que A es de tamaño 2×2 y B es de tamaño 2×3 , esto es, el número de columnas de A coincide con el número de renglones de B . La matriz resultante AB será de tamaño 2×3 . Aplicando la definición del producto de matrices, tenemos que

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \quad -2] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} & [1 \quad -2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & [1 \quad -2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [2 \quad -3] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} & [2 \quad -3] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & [2 \quad -3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -10 & 2 & 1 \\ -14 & 5 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Ejemplo 6.3.5

Obtener el producto AB si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución. Observemos que el número de columnas de A coincide con el número de renglones de B , por lo que el producto AB se puede realizar. Aplicando la definición del producto de matrices, obtenemos que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \quad 2 \quad 2] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} & [1 \quad 2 \quad 2] \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ [2 \quad 3 \quad 4] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} & [2 \quad 3 \quad 4] \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 13 \\ 38 & 25 \end{bmatrix}.$$



Ejemplo 6.3.6

Sean A , B y C matrices de tamaños 2×3 , 2×2 y 3×2 , respectivamente. Determinar cuáles de los productos

$$AB, BA, AC, CA, BC, CB, (AB)C, A(CB),$$

se pueden realizar y, de los que estén definidos, determinar el tamaño de la matriz resultante.

Solución. El producto AB no se puede realizar ya que A tiene 3 columnas y B tiene 2 renglones. Sin embargo, el producto BA sí se puede realizar ya que el número de columnas de B , igual a 2, coincide con el número de renglones de A . En este caso, el producto BA es de tamaño 2×3 .

El producto AC está definido ya que el número de columnas de A , igual a 3, coincide con el número de renglones de C y, en este caso, AC tiene tamaño 2×2 . También está definido el producto CA , ya que el número de columnas de C , igual a 2, coincide con el número de renglones de A y, en este caso, CA tiene tamaño 3×3 .

El producto BC no está definido ya que B tiene 2 columnas y C tiene 3 renglones. Sin embargo, el producto CB sí está definido, ya que C es de 3×2 y B es de 2×2 . En este caso, CB es de tamaño 3×2 .

Como el producto AB no está definido, tampoco está definido el producto $(AB)C$. Finalmente, como A es de 2×3 y CB es de 3×2 , el producto $A(CB)$ sí está definido y es de tamaño 2×2 . ■

Ejemplo 6.3.7 El producto de matrices no es conmutativo

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, determinar los productos AB y BA , así como $\text{tr}(AB)$ y $\text{tr}(BA)$.

Solución. Como A y B son matrices de 2×2 , los productos AB y BA están definidos. Aplicando la definición del producto de matrices, tenemos que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observa que $AB \neq BA$, contrario a lo que sucede con el producto de números reales o complejos. Sin embargo, tenemos que $\text{tr}(AB) = -2 = \text{tr}(BA)$. ■

Ejemplo 6.3.8 Traza de un producto de dos matrices de orden 2

Si $A = [a_{i,j}]$ y $B = [b_{i,j}]$ son matrices de orden 2 con entradas números reales o complejos, entonces de acuerdo con la definición de multiplicación de matrices (6.3.2), tenemos que

$$\begin{aligned}[AB]_{1,1} &= a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1}, \\ [AB]_{2,2} &= a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2},\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\text{tr}(AB) = [AB]_{1,1} + [AB]_{2,2} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2}. \quad (6.1)$$

De manera análoga, utilizando nuevamente la definición de multiplicación de matrices (6.3.2), tenemos que

$$\begin{aligned}[BA]_{1,1} &= b_{1,1}a_{1,1} + b_{1,2}a_{2,1}, \\ [BA]_{2,2} &= b_{2,1}a_{1,2} + b_{2,2}a_{2,2},\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\text{tr}(BA) = [BA]_{1,1} + [BA]_{2,2} = b_{1,1}a_{1,1} + b_{1,2}a_{2,1} + b_{2,1}a_{1,2} + b_{2,2}a_{2,2}. \quad (6.2)$$

Comparando las relaciones (6.1) y (6.2), concluimos que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Este resultado generaliza el Ejemplo 6.3.7.

Ejemplo 6.3.9

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, determinar el producto AB .

Solución. De acuerdo con la definición para el producto de matrices, tenemos que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aquí tenemos un producto de matrices igual a una matriz cero, donde ninguna de las matrices es nula. Por lo tanto, si tenemos que $AB = 0$, no podemos concluir que $A = 0$ o $B = 0$, contrario a lo que sucede con los números reales o complejos.



Ejemplo 6.3.10 Ley distributiva izquierda

Si $A = [a_{i,j}]$ es una matriz de $m \times n$ y, $B = [b_{j,k}]$, $C = [c_{j,k}]$ son matrices de $n \times p$, entonces de acuerdo con la definición del producto de matrices (6.3.2) tenemos que

$$\begin{aligned} [A(B+C)]_{i,k} &= \sum_{j=1}^n a_{i,j}(b_{j,k} + c_{j,k}) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,k} + \sum_{j=1}^n a_{i,j}c_{j,k} = [AB]_{i,k} + [AC]_{i,k} \\ &= [AB + AC]_{i,k}, \end{aligned}$$

para cada $i = 1, \dots, m$ y para cada $k = 1, \dots, p$.

Por lo tanto, tenemos la igualdad $A(B+C) = AB + AC$.

Ejemplo 6.3.11 Ley asociativa de la multiplicación de matrices

Si A , B y C son matrices de tamaños $m \times n$, $n \times p$ y $p \times r$, entonces de acuerdo con la Observación 6.3.3-1) tenemos que

$$(AB)C = [(AB)C_{*1} \mid (AB)C_{*2} \mid \dots \mid (AB)C_{*r}]. \quad (6.3)$$

Ahora vamos a determinar el producto $(AB)C_{*k}$ para $k = 1, \dots, r$. Aplicando nuevamente la Observación 6.3.3-1) al producto AB , tenemos que

$$(AB)C_{*k} = [AB_{*1} \mid AB_{*2} \mid \dots \mid AB_{*p}]C_{*k}$$

De acuerdo con la Observación 6.3.3-2), podemos desarrollar este producto usando las columnas de la matriz del corchete, obteniendo

$$(AB)C_{*k} = c_{1,k}(AB_{*1}) + c_{2,k}(AB_{*2}) + \dots + c_{p,k}(AB_{*p}),$$

donde $C = [c_{i,j}]$. Utilizando la propiedad $c(AB) = A(cB)$ cuando c es un escalar, la igualdad anterior la podemos escribir en la forma

$$(AB)C_{*k} = A(c_{1,k}B_{*1}) + A(c_{2,k}B_{*2}) + \dots + A(c_{p,k}B_{*p}).$$

Utilizando ahora la ley distributiva izquierda (ver Ejemplo 6.3.10), tenemos que $(AB)C_{*k} = A(c_{1,k}B_{*1} + c_{2,k}B_{*2} + \dots + c_{p,k}B_{*p}) = A(BC_{*k})$, donde la segunda igualdad se sigue por el desarrollo del producto BC_{*k} usando las columnas de la matriz B según la Observación 6.3.3-2).

Por lo tanto, la relación (6.3) la podemos escribir en forma equivalente como

$$\begin{aligned} (AB)C &= [A(BC_{*1}) \mid A(BC_{*2}) \mid \dots \mid A(BC_{*r})] = A[BC_{*1} \mid BC_{*2} \mid \dots \mid BC_{*r}] \\ &= A(BC), \end{aligned}$$

donde las últimas dos igualdades se siguen por la Observación 6.3.3-1).

En conclusión, tenemos que $(AB)C = A(BC)$.

A continuación listamos algunas propiedades del producto de matrices junto con los resultados de los Ejemplos 6.3.10 y 6.3.11.

Propiedades del producto de matrices (6.3.12)

Sean A , B y C matrices tales que están definidos los productos y las sumas indicadas. Entonces, los siguientes enunciados son verdaderos.

- 1) Ley asociativa de la multiplicación: $A(BC) = (AB)C$.
- 2) Ley distributiva izquierda: $A(B + C) = AB + AC$.
- 3) Ley distributiva derecha: $(A + B)C = AC + BC$.
- 4) Si c es un número real o complejo, entonces $c(AB) = (cA)B = A(cB)$.
- 5) En general, $AB \neq BA$.
- 6) Si A es de $m \times n$, entonces $AI_n = I_m A = A$.
- 7) Si A es de $m \times n$, entonces $A0_{n,p} = 0_{m,p}$ y $0_{r,m}A = 0_{r,n}$.
- 8) $(AB)^T = B^T A^T$.
- 9) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

A continuación, comparamos las propiedades del producto de matrices con las del producto de números reales o complejos.

Álgebra matricial

$$A(B + C) = AB + AC$$

En general, $AB \neq BA$

$$A(BC) = (AB)C$$

Si A es de $m \times n$, $AI_n = I_m A = A$

Si A es de $m \times n$, $A0_{n,p} = 0_{m,p}$ y $0_{r,m}A = 0_{r,n}$

AB no siempre existe

Si $AB = 0$, no es cierto que $A = 0$ o $B = 0$

Álgebra numérica

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$ab = ba$$

$$a(bc) = (ab)c$$

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

ab siempre es un número

Si $ab = 0$, $a = 0$ o $b = 0$

Potencias de matrices cuadradas (6.3.13)

Si A es una matriz de orden n , definimos $A^0 = I_n$, $A^1 = A$ y, para cada entero $n \geq 2$, $A^n = AA^{n-1}$.

Ejemplo 6.3.14

Si A y B son matrices de orden n , determinar $(A + B)^2$.

Solución. Según (6.3.13), tenemos que $(A + B)^2 = (A + B)(A + B)$.
Luego,

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= (A + B)A + (A + B)B \quad (\text{por la ley distributiva izquierda}) \\ &= AA + BA + AB + BB \quad (\text{por la ley distributiva derecha}) \\ &= A^2 + BA + AB + B^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Como $AB \neq BA$ en general, no podemos concluir que $AB + BA = 2AB$.

Compara el desarrollo de $(A + B)^2$ con el de $(a + b)^2$ cuando a y b son números reales o complejos. ■

Actividad de Aprendizaje 6.3.15

- 1) (S) Si $\begin{bmatrix} -1 & x \\ y & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 10 \\ 6 & b \end{bmatrix}$, determina los valores de x, y, a y b .
- 2) (S) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ y $AB = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$, determina la matriz B .
- 3) (S) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, determina la matriz $2A^2 - A + 3I_3$.
- 4) (S) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Construye una matriz D de tamaño 4×2 usando solo unos y ceros, de tal forma que $AD = I_2$. ¿Habría una matriz C de tamaño 4×2 tal que $AC = I_4$? ¿Por qué?

5) (S) Considera las matrices:

$$x = \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 10 \\ 6 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \frac{1}{2} [1 \quad 1], \quad G_3 = \frac{1}{2} [1 \quad -1].$$

a) Determina los productos H_1x , G_1x , H_2H_1x , G_2H_1x , H_2G_1x , G_2G_1x , $H_3H_2H_1x$, $G_3H_2H_1x$, $H_3G_2H_1x$, $G_3G_2H_1x$, $H_3H_2G_1x$, $G_3H_2G_1x$, $H_3G_2G_1x$ y $G_3G_2G_1x$.

b) Determina los productos $H_jH_j^T$, $G_jG_j^T$ y $H_jG_j^T$ para $j = 1, 2, 3$.

6) (S) Si x es un número real, considera la matriz de 3×3

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determina el producto $A(x_1)A(x_2)$ para cualesquiera números reales x_1 y x_2 .

7) (S) Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Determina la matriz $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$.

8) (SA) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Si $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, determina los valores de a y b .

9) (SA) Sean A una matriz de 4×4 y x un vector columna de 4×1 . ¿Cuál es la forma más rápida de calcular A^2x ? Cuenta las multiplicaciones.

- 10) (SA) Si A y B son matrices de orden n , desarrolla y simplifica el producto $(A + B)(A - B)$. Compara tu resultado con el desarrollo de $(a + b)(a - b)$ cuando a y b son números reales o complejos.
- 11) (SA) Si A y B son matrices de orden n , desarrolla y simplifica el producto $(A + B)^3$. Compara tu resultado con el desarrollo de $(a + b)^3$ cuando a y b son números reales o complejos.
- 12) (SA) Sean $A = [a_{i,j}]$ y $B = [b_{i,j}]$ matrices de orden 3. Determina $\text{tr}(AB)$ y $\text{tr}(BA)$.
- 13) (SA) Sean $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, A una matriz de $3 \times n$ y B una matriz de $m \times 3$.
- Describe al producto PA en términos de los renglones de A .
 - Describe al producto BP en términos de las columnas de B .
- 14) (SA) Sean A y B matrices cuadradas.
- Si $A = \text{diag}[a, b]$ y $B = \text{diag}[c, d]$, determina las matrices AB y BA . ¿Son iguales AB y BA ?
 - Si $A = \text{diag}[a, b, c]$ y $B = \text{diag}[d, e, f]$, determina las matrices AB y BA . ¿Son iguales AB y BA ?
 - Si $A = \text{diag}[a_1, a_2, \dots, a_n]$ y $B = \text{diag}[b_1, b_2, \dots, b_n]$, determina las matrices AB y BA . ¿Son iguales AB y BA ?
- 15) (SA) Simplifica las siguientes operaciones con matrices.
- $A(3B - C) + (A - 2B)C + 2B(C + 2A)$.
 - $A(B + C - D) + B(C - A + D) - (A + B)C + (A - B)D$.
 - $AB(BC - CB) + (CA - AB)BC + CA(A - B)C$.
 - $(A - B)(C - A) + (C - B)(A - C) + (C - A)^2$.
- 16) (SA) Si $A = [a_{i,j}]$ es una matriz de orden n , determina $\text{tr}(AA^T)$.
- 17) (SA) Determina si hay matrices A y B de 2×2 , tales que $AB - BA = I_2$. (Examina las entradas $(1, 1)$ y $(2, 2)$).
- 18) (SA)
- Determina todas las matrices A simétricas de 2×2 tales que A^2 sea la matriz nula de orden 2.

Actividad de Aprendizaje 6.3.15 (Continuación)

- b) Determina todas las matrices A simétricas de 3×3 tales que A^2 sea la matriz nula de orden 3.
- c) Determina todas las matrices A simétricas de $n \times n$ tales que A^2 sea la matriz nula de orden n .
- 19) (SA) Una **matriz de Hadamard** es una matriz H de orden n formada por 1's y -1 's que satisface la igualdad $HH^T = nI_n$.
- a) Verifica que la matriz $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ es una matriz de Hadamard.
- b) Verifica que la matriz $H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz de Hadamard.
- c) Observa que $H_4 = \left[\begin{array}{c|c} H_2 & H_2 \\ \hline H_2 & -H_2 \end{array} \right]$ y construye una matriz de Hadamard de orden 8.
- 20) (SS) Determina dos matrices A y B de orden 2 tales que $AB = 0$ pero que $BA \neq 0$, donde 0 denota la matriz nula de orden 2.
- 21) (SS) Determina dos matrices A y B de orden 3 tales que $ABAB = 0$ pero que $BABA \neq 0$, donde 0 denota la matriz nula de orden 3.
- 22) (SS) Sea A una matriz de $m \times n$.
- a) Si $AX = 0_{m,1}$ para cada matriz X de $n \times 1$, determina la matriz A .
- b) Si $YA = 0_{1,n}$ para cada matriz Y de $1 \times m$, determina la matriz A .
- 23) (SS) Sean A y B matrices de orden n . Se dice que A y B *conmutan* cuando se cumple la igualdad $AB = BA$.
- a) Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, determina los productos $AE_{1,1}$, $E_{1,1}A$, $AE_{1,2}$, $E_{1,2}A$, $AE_{2,1}$, $E_{2,1}A$, $AE_{2,2}$ y $E_{2,2}A$, donde la matriz $E_{i,j}$ es una matriz de orden 2 cuya entrada (i, j) es igual a 1 y las otras entradas son iguales a 0.
- b) Determina *todas* las matrices de orden 2 que conmutan con *todas* las matrices de orden 2. (Usa el inciso anterior y el Ejemplo 6.2.15).
- 24) (SS) Determina si hay matrices A y B de $n \times n$ tales que $AB - BA = I_n$.
- 25) (SS) Sea A una matriz de orden n tal que $A^T A = A^2$. Determina la traza del producto $(A - A^T)^T (A - A^T)$.

6.4. Matrices en bloques

A veces es útil considerar matrices cuyas entradas son también matrices, llamadas **bloques**. Una matriz vista de esta forma se dice que está **particionada en bloques**.

Ejemplo 6.4.1

Si A es una matriz de $m \times n$, una partición de A en bloques es

$$A = [A_{*1} \mid A_{*2} \mid \dots \mid A_{*n}],$$

donde los bloques $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$, son las columnas de A .

Otra partición de A en bloques es

$$A = \begin{bmatrix} A_{1*} \\ A_{2*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{bmatrix},$$

donde los bloques $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$, son los renglones de A .

Descomposición de un producto de matrices por columnas y renglones (6.4.2)

Si A y B son matrices de $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente, entonces

$$AB = [A_{*1} \mid A_{*2} \mid \dots \mid A_{*n}] \begin{bmatrix} B_{1*} \\ B_{2*} \\ \vdots \\ B_{n*} \end{bmatrix} = A_{*1}B_{1*} + A_{*2}B_{2*} + \dots + A_{*n}B_{n*},$$

donde $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ denotan las columnas de A y $B_{1*}, B_{2*}, \dots, B_{n*}$ denotan los renglones de B .

Ejemplo 6.4.3

Consideremos las siguientes matrices particionadas como se muestra.

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 7 & 5 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} I_2 & 0_{2,3} \\ P & Q \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \left[\begin{array}{cc} 4 & -2 \\ 5 & 6 \\ \hline 7 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Esta partición es particularmente útil para realizar el producto AB , el cual se puede calcular en bloques como sigue

$$AB = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} IX + 0Y \\ PX + QY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ PX + QY \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 4 & -2 \\ 5 & 6 \\ \hline 30 & 8 \\ 8 & 27 \end{array} \right].$$

Es fácil verificar que este resultado coincide con el producto AB calculado directamente.

Producto de matrices en bloques (6.4.4)

Podemos calcular el producto AB usando la multiplicación usual de matrices, utilizando bloques como entradas. El único requisito es que los bloques sean compatibles. Esto es, *los tamaños de los bloques deben ser tales que todos los productos entre bloques tengan sentido*. Esto significa que el número de columnas en cada bloque de A debe ser igual al número de renglones en el correspondiente bloque de B .

Ejemplo 6.4.5

Determinar el producto AB en bloques, de las siguientes matrices particionadas.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ \hline -5 & 1 \\ 0 & 8 \\ 0 & 2 \end{array} \right].$$

Solución. Hagamos $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, donde $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ y $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$. De manera análoga, hagamos $B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}$, donde $B_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ y $B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Entonces,

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{bmatrix}.$$

Esta igualdad es válida porque los tamaños de los bloques son tales que todos los productos se pueden realizar.

$$\begin{aligned} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -23 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -23 & 12 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 17 & 14 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -23 & 12 \\ 17 & 14 \end{bmatrix}.$

Se deja de ejercicio calcular este producto de manera directa. ■

El siguiente resultado es útil para calcular potencias de cierto tipo de matrices.

Un producto útil en bloques (6.4.6)

Sean $A = \begin{bmatrix} B & X \\ 0 & C \end{bmatrix}$ y $A_1 = \begin{bmatrix} B_1 & X_1 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix}$, donde B y B_1 son matrices cuadradas del mismo tamaño y, C y C_1 también son matrices cuadradas del mismo tamaño. Estas particiones de A y A_1 son compatibles y, el producto AA_1 en bloques, es

$$AA_1 = \begin{bmatrix} B & X \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & X_1 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BB_1 & BX_1 + XC_1 \\ 0 & CC_1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 6.4.7

Determinar una fórmula para A^k donde $A = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada, I es una matriz identidad y k es un entero positivo.

Solución. Observemos que la matriz 0 debajo de la matriz X , es una matriz cuadrada ya que las matrices A e I son cuadradas. Entonces, podemos aplicar el resultado (6.4.6). Tenemos que

$$A^2 = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^2 & IX + X0 \\ 0 & 0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Por lo tanto, $A^3 = AA^2 = AA = A^2 = A$, $A^4 = AA^3 = AA = A^2 = A$, etc. Continuando de esta forma, obtenemos que $A^k = A$ para cualquier entero positivo k . ■

Actividad de Aprendizaje 6.4.8

- 1) (S) Determina el producto AB , utilizando las particiones en bloques indicadas.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right].$$

- 2) (S) Determina el producto $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, utilizando la descomposición por columnas y renglones (6.4.2). Después verifica tu respuesta calculando el producto directamente.
- 3) (S) Determina el producto AB en bloques, utilizando particiones adecuadas para las matrices A y B .

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} -3 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -2 & 0 \end{array} \right].$$

- 4) (S) En cada caso, determina fórmulas para A^n utilizando la partición en

bloques indicada. El número n denota cualquier entero positivo.

$$\text{a) } A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array} \right], \quad \text{b) } A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

- 5) (S) Determina si es posible realizar cada producto en bloques, utilizando las particiones que se muestran. Luego determina los productos que se puedan realizar en bloques.

$$\text{a) } \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array} \right].$$

$$\text{b) } \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array} \right].$$

$$\text{c) } \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ \hline 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right].$$

$$\text{d) } \left[\begin{array}{cc} 2 & -5 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{array} \right].$$

- 6) (S) Particiona la siguiente matriz en bloques y después determina M^2 utilizando los bloques.

$$M = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right].$$

- 7) (S) Determina la matriz B_1 dado que $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ 0 & C_3 \end{bmatrix},$

Actividad de Aprendizaje 6.4.8 (Continuación)

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- 8) (S) Considera la matriz en bloques $M = \begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix}$, donde I es una matriz identidad y 0 es una matriz de ceros. Determina el producto MM^T .
- 9) (SA) Determina los siguientes productos utilizando la multiplicación en bloques. Todos los bloques son de tamaño $k \times k$ y n es un entero positivo.
- a) $\begin{bmatrix} I & X \\ -Y & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y & I \end{bmatrix}$.
- b) $\begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix}$.
- c) $\begin{bmatrix} I & X \\ I & X \end{bmatrix}^T$.
- d) $\begin{bmatrix} I & X^T \\ -X & I \end{bmatrix}^T$.
- e) $\begin{bmatrix} I & X \\ 0 & -I \end{bmatrix}^n$.
- f) $\begin{bmatrix} 0 & X \\ I & 0 \end{bmatrix}^n$.
- 10) (SS) Sean $A = [a_{ij}]$ y B matrices de $m \times n$ y $p \times q$, respectivamente. El **producto de Kronecker** de A y B es la matriz en bloques de $mp \times nq$ definida por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & \dots & a_{m,n}B \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$, entonces $A \otimes B = \begin{bmatrix} B & 2B \\ 3B & 4B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 10 & 12 \\ 15 & 18 & 20 & 24 \end{bmatrix}$ y $B \otimes A = \begin{bmatrix} 5A & 6A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 6 & 12 \\ 15 & 20 & 18 & 24 \end{bmatrix}$.

Justifica las siguientes relaciones del producto de Kronecker, donde A , B , C y D son matrices tales que los productos AC , BD y las sumas $A + B$, $B + C$, están bien definidos.

- a) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$.
- b) $c(A \otimes B) = (cA) \otimes B = A \otimes (cB)$, donde c es un escalar.
- c) $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$.
- d) $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$.
- e) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$.

6.5. Inversa de una matriz

Consideremos la ecuación numérica $ax = b$ donde a y b son conocidos. Si $a = 0$, la ecuación no tiene solución, a menos que $b = 0$. Sin embargo, si $a \neq 0$, podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por el inverso multiplicativo $a^{-1} = \frac{1}{a}$, para obtener la solución $x = a^{-1}b$. Multiplicar por a^{-1} es lo mismo que dividir por a y la propiedad de a^{-1} que hace que esto funcione es $a^{-1}a = 1 = aa^{-1}$. En el caso de las matrices, tenemos la siguiente definición análoga.

Matriz inversa (6.5.1)

Si A es una matriz cuadrada, una matriz B es llamada una **inversa** de A si $AB = I$ y $BA = I$. Una matriz A que tiene una inversa se llama **invertible** o **no singular**.

Ejemplo 6.5.2

La matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es una inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, ya que

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

En otras palabras, la matriz A es invertible porque tiene una inversa.

Ejemplo 6.5.3 Una matriz que no tiene inversa

Cualquier matriz de la forma $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no tiene inversa ya que para cualquier matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tenemos que

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy & bx + dy \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

lo que significa que este producto de matrices nunca será igual a la matriz identidad de orden 2 por tener un renglón de ceros.

Observación 6.5.4

El argumento del Ejemplo 6.5.3 muestra también que ninguna matriz cuadrada nula tiene una inversa. Pero también muestra que, contrario a la aritmética de los números reales o complejos, *es posible que una matriz cuadrada que no sea nula no tenga una inversa*. Sin embargo, si una matriz tiene una inversa, solo tiene una como veremos a continuación.

Unicidad de la inversa (6.5.5)

Sea A una matriz cuadrada. Si B y C son ambas inversas de A , entonces $CA = I = AB$, lo cual implica que

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C.$$

En otras palabras, si A es invertible, entonces A solo tiene una inversa. Si A es una matriz invertible, denotamos a su (única) inversa por A^{-1} . Por lo tanto, la matriz A^{-1} (cuando existe), es una matriz cuadrada del mismo tamaño que A con la propiedad de que $AA^{-1} = I$ y $A^{-1}A = I$. Estas relaciones caracterizan a la matriz A^{-1} en el siguiente sentido: Si de alguna manera se puede encontrar una matriz B tal que $AB = I$ y $BA = I$, entonces A es invertible y B es la inversa de A ; en símbolos, $B = A^{-1}$.

Veamos la utilidad del criterio anterior en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6.5.6

Si $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, determinar A^3 y A^{-1} , en caso de existir esta última matriz.

Solución. Tenemos que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y, por lo tanto,

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Como $A^2 A = (AA)A = A(AA) = AA^2$ por la asociatividad del producto de matrices, concluimos que $A^2 A = I$ y también $AA^2 = I$, lo que significa, por la unicidad de la matriz inversa, que A^2 es la inversa de A . Esto es,

$$A^{-1} = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

Ejemplo 6.5.7

Determinar, si existe, la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.

Solución. De acuerdo con la definición de matriz inversa, debemos determinar si hay una matriz $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $AB = BA = I$. Realizando los productos obtenemos que

$$AB = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ia & ib \\ -ic & -id \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ai & -bi \\ ci & -di \end{bmatrix}.$$

Como AB y BA deben ser iguales a la matriz identidad de orden 2, tenemos que $ai = 1$, $-di = 1$, $ic = -ic = 0$ y $bi = -bi = 0$. De aquí se sigue que $a = \frac{1}{i} = -i$, $d = -\frac{1}{i} = i$, $c = 0$ y $b = 0$, por lo que A es invertible y su inversa es $\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$. ■

Ejemplo 6.5.8

Determinar, si existe, la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 2 \end{bmatrix}$.

Solución. Sea $B = [b_{i,j}]$ una matriz de 3×3 tal que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Realizando el producto del segundo renglón de A por la segunda columna de B , obtenemos la relación

$$b_{2,2} + (1+i)b_{3,2} = 1. \quad (6.4)$$

Si ahora realizamos el producto del tercer renglón de A por la segunda columna de B , obtenemos la relación

$$(1-i)b_{2,2} + 2b_{3,2} = 0. \quad (6.5)$$

Multiplicando la relación (6.4) por $1-i$, obtenemos que

$$(1-i)b_{2,2} + 2b_{3,2} = 1-i. \quad (6.6)$$

Luego, de las relaciones (6.5) y (6.6), se sigue que $0 = 1-i$, lo cual es falso. Esto significa que no hay ninguna matriz B tal que $AB = I_3$, por lo que A no es invertible. ■

Inversa de una matriz de 2×2 (6.5.9)

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, es fácil ver que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

esto es,

$$A \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad-bc)I_2 = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} A.$$

Esto significa que A es invertible si y solo si $ad-bc \neq 0$ y, en este caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 6.5.10 Cualquier matriz identidad es invertible

Si I es una matriz identidad, entonces $II = I$ (ver Propiedad (6.3.12)-6)) y, por lo tanto, $I^{-1} = I$.

Ejemplo 6.5.11 El producto de matrices invertibles es invertible

Si A y B son matrices invertibles de orden n , entonces aplicando la ley asociativa del producto de matrices tenemos que

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I, \\ (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,\end{aligned}$$

lo que significa que el producto $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa del producto AB , esto es, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ejemplo 6.5.12 Doble inversa

Si A es una matriz invertible de orden n , entonces A tiene una única inversa A^{-1} según la Propiedad (6.5.5), esto es, $AA^{-1} = I = A^{-1}A$. En otras palabras, A es la matriz inversa de A^{-1} , esto es, $(A^{-1})^{-1} = A$.

A continuación listamos algunas propiedades de las inversas de matrices junto con los resultados de los Ejemplos 6.5.10, 6.5.11 y 6.5.12.

Propiedades de la inversa de una matriz (6.5.13)

En los incisos del 1) al 5), todas las matrices son cuadradas del mismo tamaño.

- 1) La matriz I es invertible y $I^{-1} = I$.
- 2) Si A es invertible, también lo es A^{-1} y $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 3) Si A y B son matrices invertibles, también lo es el producto AB y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- 4) Si A es invertible y $c \neq 0$ es un número real o complejo, entonces cA es invertible y $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 5) A es invertible si y solo si A^T es invertible; más aún, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- 6) Leyes de cancelación. Sea A una matriz invertible de orden n .
 - a) Si B y C son matrices de tamaños $n \times p$ y $AB = AC$, entonces $B = C$.
 - b) Si B y C son matrices de tamaños $m \times n$ y $BA = CA$, entonces $B = C$.

Observación 6.5.14

Las leyes de cancelación describen que una matriz invertible se puede “cancelar por la izquierda” y “cancelar por la derecha”, respectivamente. Sin embargo, hacemos notar que no se cumple la cancelación “mezclada” en general, esto es, si A es invertible y $AB = CA$, entonces B y C pueden no ser iguales, aún cuando ambas matrices sean cuadradas. Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = CA$ pero $B \neq C$. Esto es contrario a lo que sucede con los números reales o complejos: Si $a \neq 0$ y $ab = ca$, entonces $b = c$. El asunto está en la conmutatividad del producto. El producto de matrices no es conmutativo pero el producto de números reales o complejos sí lo es.

Ejemplo 6.5.15

Determinar la matriz A si $(A^T - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución. Aplicando la Propiedad (6.5.13)-2), tenemos que

$$A^T - 2I = \left((A^T - 2I)^{-1} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Usando la Propiedad (6.5.9), tenemos que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, por lo que tenemos la relación

$$A^T - 2I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

esto es, $A^T = 2I + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Finalmente, aplicando el resultado del

Ejemplo 6.1.19, obtenemos que $A = (A^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. ■

El siguiente resultado es útil para determinar la inversa de cierto tipo de matrices en bloques.

Inversa de un tipo de matriz en bloques (6.5.16)

Sean $P = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} A & 0 \\ Y & B \end{bmatrix}$ matrices en bloques donde A es de $m \times m$ y B es de $n \times n$.

a) P es invertible si y solo si A y B son invertibles. En este caso, tenemos que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}XB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

b) Q es invertible si y solo si A y B son invertibles. En este caso, tenemos que

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}YA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 6.5.17

Determinar la inversa, si existe, de la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Solución. Consideremos la siguiente partición en bloques.

$$P = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Aplicando la Propiedad (6.5.9), tenemos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Luego, por la Propiedad (6.5.16), se sigue que la matriz P es invertible y

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}XB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -14 & 8 \\ -1 & 2 & 16 & -9 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right].$$



Actividad de Aprendizaje 6.5.18

1. (S) En cada caso, muestra que las matrices son inversas una de la otra.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$

2. (S) Determina la matriz A en cada caso.

a) $(3A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

b) $(2A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}.$

c) $(I + 3A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$

d) $(I - 2A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

e) $\left(A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

f) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$

g) $(A^T - 2I)^{-1} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$

h) $(A^{-1} - 2I)^T = -2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

i) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

3. (S) Determina si la matriz $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ es invertible y, en caso de serlo, obtén su inversa.

4. (S) Determina si la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es invertible y, en caso de serlo, obtén su inversa.

5. (S) Considera las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determina A^6 , B^4 y C^3 .

b) Utiliza el inciso anterior para obtener A^{-1} , B^{-1} y C^{-1} .

6. (S) En cada caso, determina la inversa de la matriz A utilizando la Propiedad (6.5.16).

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}. \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. (SA) Sea A una matriz cuadrada.

a) Si $A = \text{diag}[a, b]$ y $ab \neq 0$, determina, si existe, A^{-1} .

b) Si $A = \text{diag}[a, b, c]$ y $abc \neq 0$, determina, si existe, A^{-1} .

c) Si $A = \text{diag}[a_1, a_2, \dots, a_n]$ y $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, determina, si existe, A^{-1} .

8. (SA) Verifica que $A^2 - 3A + 2I = 0$ con la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y usa esto para determinar A^{-1} .

$$9. \text{ (SA) Sea } Q = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}.$$

a) Determina QQ^T .

b) Determina Q^{-1} asumiendo que Q no es la matriz cero.

10. (SA) Sea A una matriz cuadrada.

a) Si $A^3 - 3A + 2I = 0$, determina A^{-1} en caso de existir.

b) Si $A^4 + 2A^3 - A - 4I = 0$, determina A^{-1} en caso de existir.

11. (SA) Una matriz A de orden n se llama **idempotente** si satisface la igualdad $A^2 = A$.

a) Verifica que la matriz identidad de orden n es una matriz idempotente invertible.

- b) Además de la matriz identidad de orden n , determina si hay otra matriz de orden n que sea idempotente invertible.
- c) Si P es una matriz idempotente, determina $(I - 2P)^{-1}$, en caso de existir.
12. (SA) Sea J una matriz de 4×4 con todas sus entradas iguales a 1. Determina el producto $(I - \frac{1}{2}J)^2$ y la inversa de la matriz $I - \frac{1}{2}J$.
13. (SA) Si X es una matriz de $n \times m$ tal que $X^T X = I_m$, determina el producto $(I_n - 2XX^T)^2$. ¿Es invertible la matriz $I_n - 2XX^T$?
14. (SA) Considera la matriz en bloques $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, donde A y D son matrices cuadradas y A es no singular. Determina el producto

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

15. (SS) Sean A , B y C matrices de orden n , siendo A y B invertibles.
- a) Si $AC = CA$, verifica que $A^{-1}C = CA^{-1}$.
- b) Si $AB = BA$, verifica que $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
16. (SS) Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño.
- a) Si $AB = BA$, verifica que $(AB)^2 = A^2B^2$.
- b) Si A y B son matrices invertibles y $(AB)^2 = A^2B^2$, verifica que $AB = BA$.
- c) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, verifica que $(AB)^2 = A^2B^2$ pero $AB \neq BA$.
17. (SS) Sean A y B matrices de orden n . Si A y AB son invertibles, ¿se puede concluir que B también es invertible?
18. (SS) Sea A una matriz de $n \times n$ y sea I la matriz identidad de orden n .
- a) Si $A^2 = 0$, verifica que $(I - A)^{-1} = I + A$.
- b) Si $A^3 = 0$, verifica que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.
- c) Determina la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- d) Si $A^n = 0$, determina una fórmula para $(I - A)^{-1}$.

Actividad de Aprendizaje 6.5.18 (Continuación)

19. (SS) Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $ad - bc \neq 0$, determina, si existe, A^{-1} .
20. (SS) Una **matriz permutación** es una matriz cuadrada cuyas entradas son ceros y unos con la propiedad de que en cada renglón y en cada columna hay exactamente un 1.
- a) Si P es una matriz permutación de orden 2, verifica que $P^{-1} = P^T$.
 - b) Si P es una matriz permutación de orden 3, verifica que $P^{-1} = P^T$.
 - c) Si P es una matriz permutación de orden n , verifica que $P^{-1} = P^T$.
21. (SS) Sean A y B matrices invertibles de orden n .
- a) Verifica que $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}$.
 - b) Suponiendo que $A + B$ es invertible, determina una expresión para $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$.
22. (SS) Sean A y B matrices de orden n y sea I la matriz identidad de orden n .
- a) Verifica que $A(I + BA) = (I + AB)A$ y $(I + BA)B = B(I + AB)$.
 - b) Si $I + AB$ es invertible, verifica que $I + BA$ también es invertible y que $(I + BA)^{-1} = I - B(I + AB)^{-1}A$.
-

6.6. Operaciones elementales en matrices y matrices elementales

En esta sección definiremos las operaciones elementales para matrices que serán empleadas a lo largo de este capítulo. En las secciones subsecuentes estas operaciones serán utilizadas para obtener métodos sencillos de cálculo, para determinar el rango de una matriz y las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

Existen dos tipos de operaciones elementales en matrices: operaciones sobre los renglones y operaciones sobre las columnas. Cada operación elemental de renglón tiene su correspondiente operación elemental de columna.

Operaciones elementales en matrices

(6.6.1)

Sea A una matriz de $m \times n$. Cualquiera de las tres operaciones siguientes sobre los renglones (columnas) de A se denomina **operación elemental de renglón (columna)**.

Tipo 1. Intercambio de dos renglones (columnas) cualesquiera de A .

Tipo 2. Multiplicación de cualquier renglón (columna) de A por un número distinto de cero.

Tipo 3. Suma de cualquier múltiplo constante de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna).

Ejemplo 6.6.2

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

El intercambio de A_{2*} , el segundo renglón de A , con A_{1*} , el primer renglón de A , es un ejemplo de una operación elemental de tipo 1 sobre los renglones. La matriz resultante es

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, la multiplicación de A_{*2} , la segunda columna de A , por el número 3, es un ejemplo de una operación elemental de columna de tipo 2. La matriz resultante es

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por último, sumar a A_{1*} , el primer renglón de A , cuatro veces A_{3*} , el tercer renglón de A , es un ejemplo de una operación elemental de renglón de tipo 3. La matriz resultante es

$$D = \begin{bmatrix} 17 & 2 & 7 & 12 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Utilizaremos la siguiente notación para indicar el tipo de operación elemental de renglón que se aplica a una matriz A .

Operación	Símbolo	Significado del símbolo
Tipo 1	$R_i \leftrightarrow R_j$	Intercambio de los renglones A_{i*} y A_{j*} , con $i \neq j$.
Tipo 2	kR_i	Se multiplica por $k \neq 0$ el renglón A_{i*} .
Tipo 3	$R_i + kR_j$	Al renglón A_{i*} se le suma kA_{j*} , con $i \neq j$.

De manera análoga, utilizaremos la siguiente notación para indicar el tipo de operación elemental de columna que se aplica a una matriz A .

Operación	Símbolo	Significado del símbolo
Tipo 1	$C_i \leftrightarrow C_j$	Intercambio de las columnas A_{*i} y A_{*j} , con $i \neq j$.
Tipo 2	kC_i	Se multiplica por $k \neq 0$ la columna A_{*i} .
Tipo 3	$C_i + kC_j$	A la columna A_{*i} se le suma kA_{*j} , con $i \neq j$.

Ejemplo 6.6.3

En cada caso, la matriz B se obtuvo de la matriz A aplicando la operación elemental de renglón indicada.

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 12 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 12 & 6 \\ 3 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix} = B. \\ A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -5 & 7 & -11 \\ -1 & 13 & -4 \end{bmatrix} &\xrightarrow{3R_2} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -15 & 21 & -33 \\ -1 & 13 & -4 \end{bmatrix} = B. \\ A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ -3 & 9 & 5 & 4 \\ 6 & -7 & 8 & 10 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_2 - 5R_1} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & -16 & -5 & -11 \\ 6 & -7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = B. \end{aligned}$$

Ejemplo 6.6.4

En cada caso, la matriz B se obtuvo de la matriz A aplicando la operación

elemental de columna indicada.

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 12 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_4} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 & 5 \\ 2 & 6 & 12 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} = B. \\
 A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 12 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\frac{1}{2}C_3} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 6 \\ 4 & 1 & 7/2 & 4 \end{bmatrix} = B. \\
 A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 12 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow{C_3 - 4C_1} \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & -9 & 4 \end{bmatrix} = B.
 \end{aligned}$$

Nos interesa estudiar a las matrices que se obtienen al aplicar exactamente una operación elemental, a una matriz identidad.

Matriz elemental (6.6.5)

Una **matriz elemental** de $n \times n$, es una matriz que se obtiene al realizar exactamente una operación elemental a la matriz I_n . Se dice que la matriz es del tipo 1, 2 o 3, dependiendo de que la operación realizada en I_n haya sido del tipo 1, 2 o 3, respectivamente.

Usaremos la siguiente notación para las matrices elementales, dependiendo del tipo de operación elemental que se realice a I_n .

Operación elemental	Matriz elemental
$R_i \leftrightarrow R_j$ o $C_i \leftrightarrow C_j$	E_{ij}
kR_i o kC_i	$E_i(k)$
$R_i + kR_j$ o $C_j + kC_i$	$E_{ij}(k)$

Observación 6.6.6

Cualquier matriz elemental puede ser obtenida al menos de dos maneras, ya sea realizando una operación elemental con los renglones en I_n o realizando una operación elemental con las columnas en I_n .

Ejemplo 6.6.7

Si $n = 3$, las matrices elementales E_{13} , $E_2(3)$ y $E_{21}(-5)$ son:

$$E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{21}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz E_{13} se obtiene de aplicar cualquiera de las operaciones elementales $R_1 \leftrightarrow R_3$ o $C_1 \leftrightarrow C_3$ a la matriz I_3 ; $E_2(3)$ se obtiene de aplicar cualquiera de las operaciones elementales $3R_2$ o $3C_2$ a la matriz I_3 ; la matriz $E_{21}(-5)$ se obtiene de aplicar cualquiera de las operaciones elementales $R_2 - 5R_1$ o $C_1 - 5C_2$ a la matriz I_3 .

El siguiente resultado muestra que realizar una operación elemental en una matriz, es lo mismo que multiplicar la matriz por una matriz elemental.

Multiplicación por una matriz elemental (6.6.8)

Sea A una matriz de $m \times n$ con entradas en K .

- 1) Si la matriz B se obtiene a partir de A al realizar exactamente una operación elemental de renglón (columna), entonces hay una matriz elemental E de orden m (orden n) tal que $B = EA$ (tal que $B = AE$). Más aún, la matriz E se obtiene al realizar la operación correspondiente de renglón (columna) en I_m (en I_n).
- 2) Si E es una matriz elemental de orden m (orden n), entonces el producto EA (el producto AE) es una matriz que se puede obtener realizando exactamente una operación elemental de renglón (columna) a la matriz A .

Ejemplo 6.6.9

Consideremos la matriz B del Ejemplo 6.6. Esta matriz fue obtenida a partir de la matriz A (en el Ejemplo 6.6), intercambiando los dos primeros renglones de A . Realizando esta misma operación de renglón en la matriz I_3 ,

obtenemos la matriz elemental

$$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que

$$E_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = B.$$

En la segunda parte del Ejemplo 6.6, la matriz C se obtiene a partir de A multiplicando la segunda columna de A por 3. Realizando esta misma operación en la matriz I_4 , obtenemos la matriz elemental

$$E_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que

$$AE_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = C.$$

Ejemplo 6.6.10

Para las matrices del Ejemplo 6.6.3, tenemos que

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 12 & 6 \\ 3 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 12 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 4 \end{bmatrix} = E_{13}A,$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -15 & 21 & -33 \\ -1 & 13 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -5 & 7 & -11 \\ -1 & 13 & -4 \end{bmatrix} = E_2(3)A,$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & -16 & -5 & -11 \\ 6 & -7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ -3 & 9 & 5 & 4 \\ 6 & -7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = E_{21}(-5)A.$$

Ejemplo 6.6.11 Una matriz elemental de tipo 1 es invertible

Sea E una matriz elemental de orden n que se obtiene intercambiando los renglones (columnas) i y j de I_n , con $i \neq j$. Se deja de ejercicio verificar que $E^2 = I_n$, lo que significa que E es invertible y $E^{-1} = E$.

Ejemplo 6.6.12 Una matriz elemental de tipo 2 es invertible

Sea E una matriz elemental de orden n que se obtiene multiplicando el renglón (columna) i de I_n por un número $k \neq 0$. Como $k \neq 0$, existe el número $\frac{1}{k}$. Sea F la matriz elemental obtenida a partir de I_n multiplicando el renglón (columna) i de I_n por el número $\frac{1}{k}$. Se deja de ejercicio verificar que $EF = FE = I_n$, lo que significa que E es invertible y $E^{-1} = F$.

Ejemplo 6.6.13 Una matriz elemental de tipo 3 es invertible

Sea E una matriz elemental de orden n que se obtiene con la operación elemental de renglón $R_i + kR_j$ (de columna $C_i + kC_j$), donde $i \neq j$. Sea F la matriz elemental obtenida a partir de I_n con la operación elemental de renglón $R_i - kR_j$ (de columna $C_i - kC_j$). Se deja de ejercicio verificar que $EF = FE = I_n$, lo que significa que E es invertible y $E^{-1} = F$.

Es un hecho de gran utilidad el que la inversa de una matriz elemental también sea una matriz elemental. A continuación resumimos la información de los Ejemplos 6.6.11, 6.6.12 y 6.6.13.

Inversa de una matriz elemental (6.6.14)

Las matrices elementales son invertibles y la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental del mismo tipo. Más aún, tenemos que

- 1) $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$, donde $i \neq j$.
- 2) $(E_i(k))^{-1} = E_i(1/k)$, donde $k \neq 0$.
- 3) $(E_{ij}(k))^{-1} = E_{ij}(-k)$, donde $i \neq j$.

El resultado (6.6.8) lo podemos aplicar a una sucesión finita de operaciones elementales de renglón o de columna.

Ejemplo 6.6.15

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y aplicamos sucesivamente las operaciones elementales de renglón $R_2 - 2R_1$, $R_2 \leftrightarrow R_3$, $R_1 - 2R_2$ y $R_2 - R_3$, obtenemos que

$$A \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_2} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_3} \xrightarrow{R_2 - R_3} I_3$$

y las correspondientes matrices elementales son $E_{21}(-2)$, E_{23} , $E_{12}(-2)$ y $E_{23}(-1)$. De acuerdo con el resultado (6.6.8), tenemos que

$$A_1 = E_{21}(-2)A, \quad A_2 = E_{23}A_1, \quad A_3 = E_{12}(-2)A_2, \quad I_3 = E_{23}(-1)A_3$$

y, por lo tanto,

$$I_3 = E_{23}(-1)E_{12}(-2)E_{23}E_{21}(-2)A.$$

Por último, usando ahora el resultado (6.6.14), podemos despejar la matriz A de la igualdad anterior utilizando las inversas de las matrices elementales como sigue

$$(E_{21}(-2))^{-1}(E_{23})^{-1}(E_{12}(-2))^{-1}(E_{23}(-1))^{-1} = A,$$

que es lo mismo que $E_{21}(2)E_{23}E_{12}(2)E_{23}(1) = A$.

Como A es producto de matrices invertibles (por ser producto de matrices elementales), la Propiedad (6.5.13)-3) nos garantiza que A también es invertible.

Ejemplo 6.6.16

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{bmatrix}$. Aplicando sucesivamente las operaciones elementa-

les de renglón $R_2 - 2R_1$, $R_3 - 3R_1$ y $R_3 - 4R_2$, obtenemos que

$$A \xrightarrow{R_2-2R_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 6 & 18 & 22 \end{bmatrix}}_{A_1} \xrightarrow{R_3-3R_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & 16 \end{bmatrix}}_{A_2} \xrightarrow{R_3-4R_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = B$$

y las correspondientes matrices elementales son $E_{21}(-2)$, $E_{31}(-3)$ y $E_{32}(-4)$. Aplicando el resultado (6.6.8), tenemos que

$$A_1 = E_{21}(-2)A, \quad A_2 = E_{31}(-3)A_1, \quad B = E_{32}(-4)A_2$$

y, por lo tanto, $B = E_{32}(-4)E_{31}(-3)E_{21}(-2)A$. Llamando P al producto

$E_{32}(-4)E_{31}(-3)E_{21}(-2)$, es fácil verificar que $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$. De esta

forma, tenemos que

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{bmatrix} = PA.$$

Más aún, la matriz P es invertible por ser producto de matrices elementales (las cuales son invertibles).

El siguiente resultado generaliza los dos ejemplos anteriores.

La forma $B = PA$ (6.6.17)

Sea A una matriz de $m \times n$. Si la matriz B se obtiene de aplicar a la matriz A una sucesión finita de operaciones elementales de renglón $R_1, R_2, \dots, R_s$, entonces $B = PA$ donde $P = E_s \cdots E_2 E_1$ y cada matriz E_i es la matriz elemental correspondiente a la operación elemental de renglón R_i .

En símbolos, tenemos que

$$\text{Si } A \xrightarrow{R_1} A_1 \xrightarrow{R_2} A_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{R_s} B, \text{ entonces } B = PA,$$

donde P es la matriz invertible definida en el párrafo anterior.

Observación 6.6.18

El siguiente resultado, es el análogo a (6.6.17) para operaciones elementales de columna.

La forma $B = AQ$. Sea A una matriz de $m \times n$. Si la matriz B se obtiene de aplicar a la matriz A una sucesión finita de operaciones elementales de columna $C_1, C_2, \dots, C_r$, entonces $B = AQ$ donde $Q = E_1 E_2 \cdots E_r$ y cada matriz E_i es la matriz elemental correspondiente a la operación elemental de columna C_i . En símbolos,

$$\text{Si } A \xrightarrow{C_1} A_1 \xrightarrow{C_2} A_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{C_r} B, \text{ entonces } B = AQ,$$

donde Q es la matriz invertible definida en el párrafo anterior.

El siguiente resultado, es una generalización de las formas $B = PA$ y $B = AQ$.

La forma $B = PAQ$. Sea A una matriz de $m \times n$. Si la matriz B se obtiene de aplicar a la matriz A una sucesión finita de operaciones elementales (de renglón o de columna), entonces $B = PAQ$ para algunas matrices invertibles P y Q .

Ejemplo 6.6.19

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & 38 \\ -1 & 2 & -6 & -33 \\ -7 & 14 & -45 & -246 \end{bmatrix}$. Aplicando sucesivamente las operaciones elementales de renglón $R_2 + R_1, R_3 + 7R_1, R_3 - 4R_2$ y $R_1 - 7R_2$ a la matriz A , obtenemos que

$$A \xrightarrow{R_2+R_1} A_1 \xrightarrow{R_3+7R_1} A_2 \xrightarrow{R_3-4R_2} A_3 \xrightarrow{R_1-7R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_4.$$

Luego, tenemos que $A_4 = E_{12}(-7)E_{32}(-4)E_{31}(7)E_{21}(1)A = PA$, donde $P = E_{12}(-7)E_{32}(-4)E_{31}(7)E_{21}(1)$.

Aplicando ahora las operaciones de columna $C_2 \leftrightarrow C_3, C_3 + 2C_1, C_4 - 3C_1$ y $C_4 - 5C_2$ a la matriz A_4 , obtenemos que

$$A_4 \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} A_5 \xrightarrow{C_3+2C_1} A_6 \xrightarrow{C_4-3C_1} A_7 \xrightarrow{C_4-5C_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_8.$$

Luego, tenemos que $A_8 = A_4 E_{23} E_{13}(2) E_{14}(-3) E_{24}(-5) = A_4 Q$, donde $Q = E_{23} E_{13}(2) E_{14}(-3) E_{24}(-5)$.

Por lo tanto,

$$A_8 = E_{12}(-7)E_{32}(-4)E_{31}(7)E_{21}(1)AE_{23}E_{13}(2)E_{14}(-3)E_{24}(-5) = PAQ,$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} -6 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Actividad de Aprendizaje 6.6.20

- 1) (S) Escribe a cada matriz B del Ejemplo 6.6.4 en la forma $B = AE$, donde E es la matriz elemental correspondiente a la operación elemental de columna que se realizó.
- 2) (S) ¿Es la matriz I_n una matriz elemental? Justifica.
- 3) (S) ¿Es la matriz nula de orden n una matriz elemental? Justifica.
- 4) (S) Determina todos los tipos de matrices elementales de orden 2.
- 5) (S) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
 - a) Determina matrices elementales E y F tales que $C = EFA$.
 - b) Determina si hay una matriz elemental E tal que $C = EA$. (El ejercicio anterior puede ser útil).
- 6) (S) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.
 - a) Determina una operación elemental que transforme a A en B .
 - b) Determina una operación elemental que transforme a B en C .
 - c) Por medio de varias operaciones elementales adicionales, transforma a C en I_3 .
- 7) (S) Escribe a la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ como producto de matrices elementales y determina A^{-1} . (El Ejemplo 6.6.15 puede ser útil).

- 8) (S) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ y sea B la matriz que se obtiene al aplicar sucesivamente las operaciones elementales de renglón $R_2 + R_1$, $R_3 - \frac{1}{3}R_1$ y $R_3 + \frac{1}{6}R_2$ a la matriz A . Determina una matriz invertible P tal que $PA = B$.

- 9) (SA) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Utilizando operaciones elementales de columna, determina una matriz invertible Q tal que $B = AQ$.

- 10) (SA) Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

- Determina matrices elementales E_1, E_2 y E_3 tales que $E_3E_2E_1A = U$, donde U es una matriz triangular superior.
- Determina las matrices inversas de E_1, E_2 y E_3 .
- Si $L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$, ¿qué tipo de matriz es L ?
- Verifica que $A = LU$.

- 11) (SA) Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$. Por medio de una sucesión de ope-

raciones elementales de renglón y de columna, transformaremos a la matriz A en una matriz D . Escribiremos muchas de las matrices intermedias, pero en algunas ocasiones transformaremos una matriz a partir de la anterior mediante varias operaciones elementales simultáneas. El número sobre la flecha indica cuántas operaciones se han realizado.

$$A \xrightarrow{1} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1}$$

Actividad de Aprendizaje 6.6.20 (Continuación)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D.$$

- a) Identifica la naturaleza de cada operación elemental (si se hizo sobre un renglón o sobre una columna) y el tipo de operación elemental (tipo 1, tipo 2 o tipo 3).
 - b) Determina matrices invertibles P y Q tales que $D = PAQ$.
- 12) (SA) Sea E una matriz elemental.
 - a) Explica por qué E^T es una matriz elemental del mismo tipo que E .
 - b) Explica por qué $E^T = E$ si E es de tipo 1 o 2.
 - 13) (SS) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$. Si A es una matriz elemental, explica por qué alguno de los números a , b o c debe ser igual a cero.
 - 14) (SS) Justifica la aseveración hecha en el Ejemplo 6.6.11: Si E es una matriz elemental de orden n de tipo 1, entonces $E^2 = I_n$.
 - 15) (SS) Justifica la aseveración hecha en el Ejemplo 6.6.12: Si $k \neq 0$, $E = E_i(k)$ es de orden n y $F = E_i(1/k)$, entonces $EF = FE = I_n$.
 - 16) (SS) Justifica la aseveración hecha en el Ejemplo 6.6.13: Si $E = E_{ij}(k)$ es de orden n , con $i \neq j$, y $F = E_{ij}(-k)$, entonces $EF = FE = I_n$.

6.7. Formas escalonadas y forma escalonada reducida

En esta sección introducimos el concepto de una matriz escalonada. Hay dos formas para una matriz escalonada: la forma escalonada por renglones y la forma escalonada reducida por renglones.

Forma escalonada por renglones (6.7.1)

Se dice que una matriz está en **forma escalonada por renglones** o simplemente en **forma escalonada** si se cumplen las dos condiciones:

- 1) Todos los renglones que consisten únicamente de ceros, si los hay, están justo después de los renglones distintos de cero.
- 2) En cada renglón distinto de cero, la primera entrada diferente de cero está a la derecha de la primera entrada diferente de cero del renglón inmediato anterior.

En los renglones no nulos de una forma escalonada por renglones, la primera entrada distinta de cero se llama **elemento pivotal** o **pivote**.

Una matriz en forma escalonada tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \textcircled{*} & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \textcircled{*} & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{*} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{*} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde los pivotes están encerrados en círculos.

Ejemplo 6.7.2

Las siguientes matrices no están en forma escalonada.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 6.7.3

La siguiente matriz está en forma escalonada. Los números encerrados en círculos son los pivotes.

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.7.4

La siguiente matriz está en forma escalonada. Los números encerrados en círculos son los pivotes.

$$\begin{bmatrix} \textcircled{2} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} \end{bmatrix}$$

Las operaciones elementales de renglón que vimos en la sección anterior, se usan, entre otras aplicaciones, para llevar una matriz a una forma escalonada por renglones. El **método de eliminación de Gauss**, también llamado **método de eliminación gaussiana**, es el que se usa para esto.

Método de eliminación de Gauss (6.7.5)

Toda matriz puede ser llevada a una forma escalonada por renglones mediante una secuencia de operaciones elementales de renglón.

El método de eliminación de Gauss es el siguiente:

Paso 1. Si la matriz consiste de puros ceros, nos detenemos. Ya está en forma escalonada por renglones.

Paso 2. En caso contrario, nos fijamos en la primera columna desde la izquierda que contenga una entrada distinta de cero. Supongamos que esa entrada es k . Entonces aplicamos una operación de renglón tipo 1 e intercambiamos el renglón que contiene tal entrada (pivote) k con el primer renglón.

Paso 3. Utilizando operaciones elementales de renglón sobre la fila superior que contiene al pivote k , restamos múltiplos de esa fila de las filas debajo de ella, para hacer ceros las entradas debajo del pivote k .

Esto completa la primera fila.

Paso 4. Se repiten los pasos del 1 al 3 sobre los otros renglones de la matriz.

El proceso se detiene cuando no quedan filas en el paso 4 o cuando las filas restantes consisten únicamente de ceros.

Ejemplo 6.7.6

Utilizando el método de eliminación de Gauss, determinar una forma escalonada de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Solución. Como ya hay un pivote 1 en la posición $(1, 2)$, debemos hacer ceros las entradas $(2, 2)$ y $(3, 2)$ utilizando ese pivote. El resultado es

$$A \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ahora, el pivote -3 que está en la posición $(2, 3)$ lo usaremos para hacer cero

debajo de él. Así, tenemos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + (-1/3)R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E.$$

La matriz E es una forma escalonada por renglones de la matriz A . ■

Ejemplo 6.7.7

Determinar una forma escalonada de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Solución. Como ya tenemos el pivote 3 en la posición $(1, 1)$, debemos hacer ceros las posiciones $(2, 1)$ y $(3, 1)$ utilizando ese pivote. El resultado es

$$A \xrightarrow{R_2 + (-2/3)R_1} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + (-4/3)R_1} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & -7/3 & -7/3 & -10/3 \end{bmatrix}.$$

Ahora usaremos el pivote $1/3$ en la posición $(2, 2)$ para generar un cero debajo de él. El resultado es

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & -7/3 & -7/3 & -10/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 7R_2} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \end{bmatrix} = E.$$

La matriz E es una forma escalonada de la matriz A .

Multiplicando el segundo renglón de la matriz E por el número 3 obtenemos que

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_2} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \end{bmatrix} = E'.$$

La matriz E' es otra forma escalonada de la matriz A . Este ejemplo muestra que una matriz puede tener más de una forma escalonada. ■

Forma escalonada reducida (6.7.8)

Una matriz en forma escalonada se dice que está en **forma escalonada reducida por renglones** o simplemente en **forma escalonada reducida**, si todos los pivotes son iguales a 1 y cada pivote es la única entrada distinta de cero en su columna.

La forma escalonada reducida por renglones de una matriz se ve como sigue

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * & * & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * & * & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde los pivotes están encerrados en círculos.

Ejemplo 6.7.9

Las siguientes matrices están en forma escalonada reducida (para cualquier elección de los números en las posiciones marcadas con *).

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Método de eliminación de Gauss-Jordan (6.7.10)

Toda matriz tiene una única forma escalonada reducida. El **método de eliminación de Gauss-Jordan**, es una variante del método de eliminación de Gauss y sirve para determinar la forma escalonada reducida de una matriz. Son dos las características que hacen diferente el método de Gauss-Jordan del método de Gauss:

- a) En cada paso del proceso, cada pivote debe convertirse en 1.
- b) En cada paso del proceso, todas las entradas arriba y abajo de cada pivote (igual a 1), deben convertirse en 0.

Ejemplo 6.7.11

Determinar la forma escalonada reducida de la matriz del Ejemplo 6.7.6.

Solución. La matriz del Ejemplo 6.7.6 es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ y una forma escalonada es la matriz $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Observemos que en la posición (1,2) ya tenemos un pivote 1 y ceros debajo de él. Luego, el pivote -3 de la posición (2,3) lo debemos hacer 1 y, con el nuevo pivote, debemos hacer un cero arriba de él. El resultado es

$$E \xrightarrow{(-1/3)R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-3R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_A.$$

La matriz E_A es la forma escalonada reducida de A . ■

Ejemplo 6.7.12

Determinar la forma escalonada reducida de la matriz del Ejemplo 6.7.7.

Solución. La matriz del Ejemplo 6.7.7 es $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ y una forma escalonada (que determinamos en ese ejemplo) es $E' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \end{bmatrix}$. Primero hagamos 1 el pivote de la posición (1,1). El resultado es

$$E' \xrightarrow{(1/3)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \end{bmatrix}.$$

Utilizando ahora el pivote 1 de la posición (2,2), haremos cero la posición (1,2). El resultado es

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - (4/3)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \end{bmatrix}.$$

Por último, hacemos 1 el pivote de la posición (3,3) y, con ese nuevo pivote, haremos ceros arriba de él. El resultado es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1/7)R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8/7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 8/7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - 3R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/7 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 8/7 \end{bmatrix} = E_A.$$

La matriz E_A es la forma escalonada reducida (por renglones) de A . ■

Observación 6.7.13

Es un hecho conocido que la forma escalonada reducida por renglones de una matriz A está determinada de manera única por la matriz A . Esto es, no importa qué secuencia de operaciones elementales de renglón se realicen para llevar a la matriz A a una forma escalonada reducida, el resultado siempre será la misma matriz. Por el contrario, esto no es cierto con las formas escalonadas. Como vimos en el Ejemplo 6.7.7, una matriz puede tener más de una forma escalonada. Sin embargo, el número de pivotes siempre es el mismo en cualquier forma escalonada, por lo que ese número depende solo de la matriz A y no de la secuencia de operaciones elementales que se usen para escalar a la matriz. Este número invariante recibe un nombre especial.

Rango de una matriz (6.7.14)

El **rango** de una matriz A es el número de pivotes en cualquier forma escalonada por renglones a la que A puede ser llevada mediante operaciones elementales de renglón.

Ejemplo 6.7.15

La matriz identidad I_n es de rango n .

Ejemplo 6.7.16

Determinar el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 8 \end{bmatrix}$.

Solución. Utilizando el método de eliminación de Gauss, determinamos una forma escalonada de A . El resultado es

$$A \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E.$$

Como la matriz E es una forma escalonada de A y tiene 2 pivotes, concluimos que el rango de A es 2. ■

Observación 6.7.17

Supongamos que A es una matriz de $m \times n$ de rango r . Entonces, $r \leq m$ ya que los pivotes están en distintos renglones y, $r \leq n$, ya que los pivotes están en distintas columnas.

Si una matriz A de $n \times n$ es invertible, es deseable tener una técnica eficiente para determinar su inversa. A continuación describimos un algoritmo para calcular la inversa.

Algoritmo de inversión de matrices (6.7.18)

Si A es una matriz cuadrada invertible, entonces mediante una secuencia de operaciones elementales de renglón se puede llevar a la matriz A a la matriz identidad I del mismo tamaño, que denotaremos por $A \rightarrow I$. Estas mismas operaciones de renglón llevan la matriz I a la matriz A^{-1} , esto es,

$I \rightarrow A^{-1}$. El algoritmo lo podemos resumir como sigue

$$[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}],$$

donde las operaciones de renglón se aplican simultáneamente a las matrices A e I .

Más aún, si A es una matriz de $n \times n$, entonces A puede ser reducida a la matriz I_n mediante una secuencia de operaciones elementales de renglón o no se puede. En el primer caso, el algoritmo produce A^{-1} ; en el segundo caso, A^{-1} no existe. Esto significa que A es invertible si y solo si el rango de A es igual a n .

Ejemplo 6.7.19

Usar el Algoritmo de inversión de matrices (6.7.18), para determinar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución. Aplicaremos operaciones elementales de renglón a la matriz doble

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

para obtener $A \rightarrow I$. El resultado es

$$[A \mid I_3] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - 4R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{(-1/2)R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2+3R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_1-11R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/2 & -3/2 & 11/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array} \right] = [I_3 \mid A^{-1}],$$

de donde se sigue que $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 11 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, como puede verificarse fácilmente. ■

Observación 6.7.20

En (6.6.17) vimos que si A es una matriz de $m \times n$ y B se obtiene de aplicar a la matriz A una secuencia de operaciones elementales de renglón, entonces podemos determinar una matriz invertible P tal que $B = PA$. La matriz P es el producto de las matrices elementales correspondientes a las operaciones elementales de renglón que se aplicaron a la matriz A .

Otra manera de determinar la matriz P sin tener que determinar las matrices elementales durante el proceso es la siguiente: Si las operaciones elementales de renglón que se utilizaron en la reducción $A \rightarrow B$, se aplican a la matriz identidad I_m , el resultado es $I_m \rightarrow PI_m = P$. Esto es, $[A \mid I_m] \rightarrow [B \mid P]$.

Ejemplo 6.7.21

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, expresar la forma escalonada reducida R de A en la forma $R = PA$ donde P es invertible.

Solución. Aplicando el método de eliminación de Gauss-Jordan, reduciremos la matriz doble $[A \mid I]$ a una matriz de la forma $[R \mid P]$. El resultado es

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

Por lo tanto, $R = PA$ donde $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. ■

Observación 6.7.22

Si A es una matriz invertible de $n \times n$, entonces por el Algoritmo de inversión de matrices (6.7.18) tenemos que $[A \mid I_n] \rightarrow [I_n \mid A^{-1}]$ y, por la Propiedad (6.6.17), resulta que $A^{-1} = E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1$, donde $E_1, E_2, \dots, E_s$ son las matrices elementales correspondientes (en orden) a las operaciones de renglón que se realizaron en la reducción $A \rightarrow I_n$. Así,

$$A = (A^{-1})^{-1} = (E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{s-1}^{-1} E_s^{-1}.$$

Esto significa que cada matriz invertible A es un producto de matrices elementales (ver la Propiedad (6.6.14)) y, como las matrices elementales son invertibles (nuevamente por la Propiedad (6.6.14)), tenemos la siguiente caracterización para matrices invertibles.

Criterio de invertibilidad por matrices elementales (6.7.23)

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si es un producto de matrices elementales.

Ejemplo 6.7.24

Factorizar la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ como producto de matrices elementales.

Solución. Aplicando la Propiedad (6.6.8), la reducción $A \rightarrow I_2$ queda como sigue

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow E_3 E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde las correspondientes matrices elementales son

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, tenemos que $(E_3 E_2 E_1)A = I_2$, esto es,

$$A = (E_3 E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$



Forma Normal de Smith (6.7.25)

Si A es una matriz de $m \times n$ de rango r , existen matrices invertibles P y Q de tamaños $m \times m$ y $n \times n$, respectivamente, tales que

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Más aún, si R es la forma escalonada reducida de A , entonces

- 1) La matriz P se puede calcular haciendo la reducción $[A \mid I_m] \longrightarrow [R \mid P]$.
- 2) La matriz Q se puede calcular haciendo la reducción

$$[R^T \mid I_n] \longrightarrow \left[\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times m} \mid Q^T \right].$$

La matriz $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es llamada la **forma Normal de Smith** de A .

Observación 6.7.26

Mientras que la forma escalonada reducida de una matriz A es la matriz “más agradable” a la cual A puede ser llevada utilizando operaciones elementales de renglón, la forma normal de Smith es la matriz “más agradable” a la cual A puede ser llevada mediante operaciones elementales de renglón y de columna. Esto se debe a que realizar operaciones de renglón en R^T equivale a realizar operaciones de columna en R y luego transponer.

Ejemplo 6.7.27

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, determinar matrices invertibles P y Q tales que $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donde r es el rango de A .

Solución. La matriz P y la forma escalonada reducida R de A las obtenemos aplicando el método de eliminación de Gauss-Jordan a la matriz doble $[A \mid I_3]$, obteniendo la matriz $[R \mid P]$. El resultado es

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Por lo tanto, $R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

En particular, tenemos que el rango de la matriz A es $r = 2$. Ahora, hacemos la reducción $[R^T \mid I_4] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]_{4 \times 3} \mid Q^T$. El resultado es

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -5 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Luego, tenemos que $Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$, por lo que $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Es fácil verificar que $PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$. ■

Actividad de Aprendizaje 6.7.28

- 1) (S) Determina cuáles de las siguientes matrices están en forma escalonada reducida y cuáles están en forma escalonada. Determina también el rango de cada matriz.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{f)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 2) (S) Determina la forma escalonada reducida de cada una de las siguientes matrices.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 1 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -9 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 3) (S) Determina el rango de cada una de las siguientes matrices.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1-a & a^2+1 \\ 1 & 2-a & -1 & -2a^2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a^2 \\ 1 & 1-a & 2 & 0 \\ 2 & 2-a & 6-a & 4 \end{bmatrix}.$$

- 4) (S) En cada caso, determina una matriz invertible P tal que $PA = B$.

$$\text{a)} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b)} A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 5) (S) Utiliza el Algoritmo de inversión de matrices (6.7.18) para determinar la inversa de cada matriz.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 6) (S) Factoriza a cada matriz como producto de matrices elementales.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 15 \end{bmatrix}.$$

Actividad de Aprendizaje 6.7.28 (Continuación)

7) (S) Determina matrices invertibles P y Q tales que $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donde r es el rango de A .

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

8) (SA) Determina una secuencia de operaciones elementales de renglón tales que

$$\begin{bmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ c_1 + a_1 & c_2 + a_2 & c_3 + a_3 \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

9) (SS) Si $abc \neq 0$, explica por qué la forma escalonada reducida de cualquier matriz de la forma $\begin{bmatrix} p & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ q & c & r \end{bmatrix}$ es la matriz identidad I_3 .

10) (SS) Si $c \neq a$ o $b \neq a$, explica por qué la forma escalonada reducida de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$ es de la forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11) (SS) Determina la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & c \\ 3 & c & 2 \end{bmatrix}$ en términos de c .

12) (SS) Sean $u \neq 0$ y $v \neq 0$ matrices de $m \times 1$ y $n \times 1$, respectivamente. Determina el rango de la matriz uv^T .

13) (SS) Supongamos que A tiene la forma escalonada reducida R .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 2 & a & 1 & 8 \\ \text{tercer renglón de } A \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determina los números a y b .

CAPÍTULO 7

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen como un elemento esencial que trata el Álgebra lineal. Esta rama de las matemáticas cuyo nombre proviene del término *al-jabr* que aparece en el título de un texto del siglo IX, escrito por el matemático árabe Al-Khwarizmi, trata las cantidades, sus estructuras y las relaciones, de forma que es la ciencia que estudia el cálculo simbólico y las ecuaciones. De todas las posibles relaciones, nos centramos en las que son lineales. El término lineal corresponde a cantidades sumadas (o restadas) y multiplicadas por números. En estos casos no aparecen, por ende, potencias de las incógnitas o productos entre ellas.

A lo largo de la historia, han sido muchos los matemáticos que se han interesado por el cálculo simbólico o, más precisamente, por la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones (lineales y no lineales).

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área o volumen, sin que tuvieran relación con problemas de medida. Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

$$\begin{aligned}1/4 \text{ anchura} + \text{longitud} &= 7 \text{ manos,} \\ \text{longitud} + \text{anchura} &= 10 \text{ manos.}\end{aligned}$$

También resolvían sistemas de ecuaciones, donde alguna de ellas era cuadrática. Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos. Thymaridas (400 A.C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Diofanto

resuelve también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero transformándolos en una ecuación lineal.

Los sistemas de ecuaciones aparecen también en los documentos indios. No obstante, no llegan a obtener métodos generales de resolución, sino que resuelven tipos especiales de ecuaciones.

El libro “El arte matemático” de un autor chino desconocido (siglo III A.C.), contiene algunos problemas donde se resuelven ecuaciones. En ellos encontramos un esbozo del método de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Uno de dichos problemas equivale a resolver un sistema de tres ecuaciones lineales por dicho método matricial.

En este capítulo aprenderemos a resolver sistemas de ecuaciones lineales de $m \geq 2$ ecuaciones en $n \geq 2$ incógnitas, iniciando con los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y veremos los métodos de solución por eliminación, por sustitución y por igualación. Después trabajaremos con sistemas de ecuaciones lineales con más de dos ecuaciones y más de dos incógnitas, los cuales aprenderemos a resolver utilizando el álgebra matricial que estudiamos en el capítulo anterior.

7.1. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, es de la forma

$$\begin{aligned} ax + by &= \alpha, \\ cx + dy &= \beta, \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde a, b, c, d, α y β son números reales. Cada una de estas ecuaciones corresponde a una línea recta. Una **solución** del sistema (7.1) es un par ordenado que satisface cada ecuación del sistema. Esto es, el par (r, s) es solución del sistema (7.1) si $ar + bs = \alpha$ y $cr + ds = \beta$.

Ejemplo 7.1.1

El par $(x, y) = (2, 3)$ es solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1, \\ x + y &= 5, \end{aligned}$$

ya que $2(2) - 3 = 1$ y $2 + 3 = 5$. Sin embargo, el par $(x, y) = (0, 5)$ no es solución del sistema porque $2(0) - 5 = -5 \neq 1$.

Ejemplo 7.1.2

El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}2x - y &= 1, \\ x + y &= 5,\end{aligned}$$

tiene como única solución al par $(x, y) = (2, 3)$.

Ejemplo 7.1.3

El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x - y &= 3, \\ 2x - 2y &= 6,\end{aligned}$$

tiene al menos dos soluciones, los pares $(x, y) = (4, 1)$ y $(x, y) = (2, -1)$ son soluciones del sistema.

Ejemplo 7.1.4

El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x + y &= 1, \\ x + y &= 2,\end{aligned}$$

no tiene soluciones. Ninguna pareja de números reales es solución del sistema.

Observación 7.1.5

Geoméricamente, una solución del sistema (7.1) es un punto (r, s) que se encuentra sobre las dos rectas que forman el sistema.

- 1) Si las dos rectas se intersecan en un solo punto, entonces el sistema tiene una única solución la cual corresponde a ese punto de intersección.
- 2) Si las dos rectas son paralelas y distintas, entonces no se intersecan y el sistema no tiene solución.

- 3) Si las dos rectas son la misma recta, entonces el sistema tiene una infinidad de soluciones, una por cada punto de la misma recta.

En el Ejemplo 7.1.2, las rectas tienen pendientes -1 y 1 , respectivamente, por lo que no son paralelas y tienen un solo punto en común $(2, 3)$. En el Ejemplo 7.1.3, las dos rectas coinciden, por lo que el sistema tiene más de una solución. En el Ejemplo 7.1.4, las rectas son paralelas y distintas, por lo que el sistema no tiene solución.

Hay varios métodos para resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

- 1) El método de eliminación o método de la suma.
- 2) El método de igualación.
- 3) El método de sustitución.

Método de eliminación o método de la suma (7.1.6)

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de la suma o de eliminación, seguimos los siguientes pasos.

- 1) En caso necesario, reescribir cada ecuación en la forma general, esto es, que los términos con variables queden del lado izquierdo y los términos constantes queden del lado derecho de la igualdad.
- 2) Si es necesario, multiplicar una o ambas ecuaciones por una constante (o constantes) para que al sumar las ecuaciones obtenidas, el resultado contenga solo una variable.
- 3) Despejar la variable en la ecuación obtenida en el paso 3).
- 4) Sustituir el valor determinado en el paso 4) en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema inicial y resolver la ecuación que resulta para determinar el valor de la variable restante.

Este método consiste en eliminar una incógnita, para lo cual se multiplica cada ecuación por el coeficiente que tenga la incógnita a eliminar de la otra ecuación y luego se restan las dos ecuaciones obtenidas.

Ejemplo 7.1.7

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}2x + 5y &= 26, \\ 3x - 4y &= -7,\end{aligned}$$

por el método de eliminación.

Solución. Si queremos eliminar la incógnita y , multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda ecuación por 5, obteniendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}8x + 20y &= 104, \\ 15x - 20y &= -35.\end{aligned}$$

Sumando ahora estas nuevas ecuaciones, obtenemos la ecuación $23x = 69$ y, de aquí, $x = \frac{69}{23} = 3$. Ahora sustituimos este valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema inicial para obtener el valor de la incógnita y . Por ejemplo, sustituyendo $x = 3$ en la primera ecuación, resulta que $2(3) + 5y = 26$, de donde $y = 4$. Por lo tanto, el sistema tiene la única solución $(3, 4)$. ■

Ejemplo 7.1.8

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}-3x + 2y &= 1, \\ 13x + 9y &= 3,\end{aligned}$$

por el método de eliminación.

Solución. Si queremos eliminar la incógnita x , multiplicamos la primera ecuación por 13 y la segunda ecuación por 3, obteniendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}-39x + 26y &= 13, \\ 39x + 27y &= 9,\end{aligned}$$

Sumando ahora estas nuevas ecuaciones, obtenemos la ecuación $53y = 22$ y, de aquí, $y = \frac{22}{53}$. Ahora sustituimos este valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema inicial para obtener el valor de la incógnita x . Por ejemplo, sustituyendo $y = \frac{22}{53}$ en la primera ecuación, resulta que $-3x + 2(\frac{22}{53}) = 1$, de donde $x = -\frac{3}{53}$. Por lo tanto, el sistema tiene la única solución $(-\frac{3}{53}, \frac{22}{53})$. ■

Ejemplo 7.1.9

Resolver el sistema de ecuaciones

$$x - 2y = 1,$$

$$2y - x = 0,$$

por el método de eliminación.

Solución. Observemos que si sumamos las dos ecuaciones, se elimina la incógnita x y también se elimina la incógnita y , obteniendo así la relación $0 = 1$, lo cual es evidentemente falso. Esto significa que el sistema de ecuaciones no tiene soluciones. ■

Ejemplo 7.1.10

Determinar todos los números reales a y b tales que el sistema de ecuaciones

$$ax + by = 0,$$

$$-bx + ay = 0,$$

tenga una infinidad de soluciones.

Solución. Observemos que si multiplicamos la primera ecuación por b y la segunda ecuación la multiplicamos por a y después sumamos los resultados, eliminamos a la incógnita x . El resultado obtenido es la ecuación $(a^2 + b^2)y = 0$. Si $a^2 + b^2 = 0$, entonces cualquier valor de y satisface la ecuación anterior. Luego, tenemos que $a^2 + b^2 = 0$ si y solo si $a = b = 0$. Es claro que si $a = 0$ y $b = 0$, cualquier par (x, y) es solución de cada ecuación del sistema, por lo que la respuesta es $a = b = 0$. ■

Método de sustitución (7.1.11)

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de sustitución, seguimos los siguientes pasos.

- 1) Despejar una variable en cualquier ecuación.
- 2) Sustituir la expresión hallada para la variable del paso 1) en la otra ecuación. Con esto obtendremos una ecuación con una sola variable.

- 3) Resolver la ecuación obtenida en el paso 2) para determinar el valor de esta variable.
- 4) Sustituir el valor encontrado en el paso 3) en la ecuación del paso 1) y resolver la ecuación para determinar la variable restante.

Ejemplo 7.1.12

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}2x + y &= 11, \\ \frac{1}{18}x + \frac{1}{6}y &= 1,\end{aligned}$$

por el método de sustitución.

Solución. Podemos despejar cualquiera de las variables en cualquiera de las ecuaciones; sin embargo, si despejamos la variable que tiene coeficiente igual a 1, podemos evitar trabajar con fracciones. En este sistema, la variable y de la primera ecuación tiene coeficiente 1. Despejando, obtenemos que $y = 11 - 2x$. Sustituyendo esta expresión para y en la segunda ecuación del sistema, obtenemos la ecuación $\frac{1}{18}x + \frac{1}{6}(11 - 2x) = 1$. Multiplicando esta ecuación por 18 y simplificando, obtenemos la ecuación $-5x = -15$ de donde $x = 3$ y, por lo tanto, $y = 11 - 2x = 5$. Luego, el sistema tiene la única solución $(x, y) = (3, 5)$. ■

Ejemplo 7.1.13

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= 2y + 3, \\ x &= y.\end{aligned}$$

por el método de sustitución.

Solución. Observemos que la variable x está despejada en cualquiera de las dos ecuaciones. Sustituyendo cualquiera de ellas en la otra ecuación, obtenemos que $2y + 3 = y$, de donde $y = -3$. Por lo tanto, $x = y = -3$. Luego, el sistema tiene la única solución $(x, y) = (-3, -3)$. ■

Ejemplo 7.1.14

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x - 2y &= -1, \\ -x + 2y &= 1.\end{aligned}$$

por el método de sustitución.

Solución. Despejando a x de la primera ecuación, obtenemos que $x = 2y - 1$. Sustituyendo en la segunda ecuación, resulta que $-(2y - 1) + 2y = 1$ y, simplificando, obtenemos que $0 = 0$. Esto significa que para cada número real y , la pareja $(2y - 1, y)$ es una solución del sistema de ecuaciones, por lo que el sistema tiene una infinidad de soluciones. ■

Método de igualación (7.1.15)

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de igualación, seguimos los siguientes pasos.

- 1) Despejar la misma variable en cada ecuación.
- 2) Igualar las expresiones obtenidas en el paso 1). Con esto obtendremos una ecuación con una sola variable.
- 3) Resolver la ecuación obtenida en el paso 2) para determinar el valor de esta variable.
- 4) Sustituir el valor encontrado en el paso 3) en cualquiera de las expresiones del paso 1) y resolver la ecuación para determinar la variable restante.

Ejemplo 7.1.16

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}2x - 5y &= 6, \\ -4x + 10y &= 1.\end{aligned}$$

por el método de igualación.

Solución. Despejando la variable x de cada ecuación, obtenemos que $x = \frac{6+5y}{2}$ y $x = \frac{1-10y}{-4}$. Igualando las dos expresiones obtenidas, obtenemos la ecuación $\frac{6+5y}{2} = \frac{1-10y}{-4}$. Multiplicando esta ecuación por -4 , obtenemos que $-2(6+5y) = 1-10y$, esto es, $-12-10y = 1-10y$, de donde $-12 = 1$. Como esta igualdad no es verdadera, concluimos que la ecuación no tiene solución y, por lo tanto, el sistema tampoco tiene soluciones. ■

Ejemplo 7.1.17

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y &= 4, \\ \frac{2}{3}x - y &= \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

por el método de igualación.

Solución. Despejando la variable y de cada ecuación, obtenemos las relaciones $y = 2(4 - \frac{1}{5}x)$ y $y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$. Igualando estas dos expresiones, obtenemos la ecuación $2(4 - \frac{1}{5}x) = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$, esto es, $8 - \frac{2}{5}x = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$. Multiplicando esta ecuación por 15 para quitar los denominadores, obtenemos que $120 - 6x = 10x - 40$, de donde se sigue que $16x = 160$ y, por lo tanto, $x = 10$. Finalmente sustituimos este valor en cualquiera de las dos expresiones que obtuvimos al inicio para determinar el valor de y . El resultado es $y = \frac{2}{3}(10) - \frac{8}{3} = 4$. Concluimos que la única solución del sistema es el par $(x, y) = (10, 4)$. ■

Actividad de Aprendizaje 7.1.18

- 1) (S) Resuelve el sistema de ecuaciones $2x + y = 5$, $x - 3y = -2$ por el método de eliminación.
- 2) (S) Resuelve el sistema de ecuaciones $2x + 3y = -\frac{7}{24}$, $x - 2y = -\frac{7}{12}$ por el método de igualación.
- 3) (S) Resuelve el sistema de ecuaciones $5x + y = 1$, $7y = 3x$ por el método de sustitución.
- 4) (S) Determina el valor de verdad de los siguientes enunciados a cerca del sistema de ecuaciones $3x - 2y = 8$, $4x + y = 7$.
 - a) El sistema no tiene solución.
 - b) La única solución es $(x, y) = (-1, 2)$.

Actividad de Aprendizaje 7.1.18 (Continuación)

c) La solución se encuentra sobre la recta $x = 2$.

- 5) (SA) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}\frac{x}{4a} - \frac{y}{9b} &= \frac{1}{6}, \\ \frac{x}{6a} - \frac{y}{5b} &= \frac{14}{15},\end{aligned}$$

donde a y b son números reales fijos distintos de cero.

- 6) (SA) Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{m}{x-a} + \frac{n}{y-b} &= \frac{m-n}{b-a}, \\ \frac{r}{x-a} + \frac{s}{y-b} &= \frac{r+s}{b-a},\end{aligned}$$

donde a, b, m, n, r y s , son números reales fijos y $a \neq b$.

- 7) (SS) Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}(a+b)x + (a-b)y &= 2ab, \\ (a+c)x + (a-c)y &= 2ac,\end{aligned}$$

donde a, b y c son números reales fijos.

- 8) (SS) Determina condiciones sobre a y b , para que el sistema de ecuaciones $ax + by = c$, $ax - by = c$ tenga solución única.
- 9) (SS) Determina condiciones sobre a, b y c , para que el sistema de ecuaciones $ax + by = c$, $bx + ay = c$ tenga más de una solución.
- 10) (SS) Determina condiciones sobre a, b, c y d , para que el sistema de ecuaciones $ax - by = c$, $bx + ay = d$ no tenga solución.
- 11) (SS) Determina dos números enteros a y b de dos dígitos cada uno con las siguientes propiedades: Si al número a se le adjunta a la derecha el número b y, a continuación, el dígito 0, el número de 5 dígitos obtenido se divide por el cuadrado del número b , obteniendo en el cociente 39 y en el residuo 575. Si al número a se le adjunta a la derecha el número b y del número de 4 dígitos obtenido se resta el número de 4 dígitos que se forma si el número b se adjunta al número a , se obtiene 1287.

7.2. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

El sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas x, y ,

$$\begin{aligned} ax + by &= \alpha, \\ cx + dy &= \beta, \end{aligned} \tag{7.2}$$

se puede escribir en notación matricial en la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Esta igualdad la podemos verificar realizando el producto de las matrices que aparecen en el lado izquierdo de la igualdad.

La matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ se llama **matriz de coeficientes**, la matriz $b = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ se llama **vector de términos independientes** y la matriz $[A \mid b] = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \end{array} \right]$ se llama **matriz aumentada** del sistema (7.2).

Ejemplo 7.2.1

La representación matricial del sistema de ecuaciones del Ejemplo 7.1.2 es

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Las representaciones matriciales de los sistemas lineales de los Ejemplos 7.1.3 y 7.1.4 son, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 7.2.2

La matriz aumentada del sistema de ecuaciones del Ejemplo 7.1.7 es $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 26 \\ 3 & -4 & -7 \end{array} \right]$. Multiplicar la primera ecuación del sistema por 4, equivale a multiplicar el primer renglón de esta matriz por 4. De manera análoga,

multiplicar la segunda ecuación del sistema por 5, equivale a multiplicar el segundo renglón de esta matriz por 5. Sumar las dos ecuaciones obtenidas, equivale a sumar los dos renglones que se obtienen después de realizar estas operaciones de renglón. En símbolos, tenemos que

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 26 \\ 3 & -4 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{4R_1 \\ 5R_2}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 8 & 20 & 104 \\ 15 & -20 & -35 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2+R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 8 & 20 & 104 \\ 23 & 0 & 69 \end{array} \right].$$

Observemos que del segundo renglón de la última matriz obtenemos la ecuación $23x = 69$, que es la ecuación que habíamos obtenido en la solución del Ejemplo 7.1.7. De aquí obtenemos el valor $x = \frac{69}{23} = 3$. Por otro lado, la ecuación correspondiente al primer renglón de la última matriz aumentada es $8x + 20y = 104$. Sustituyendo el valor $x = 3$ en esta ecuación, podemos obtener el valor de y , esto es, $y = \frac{104-8(3)}{20} = 4$.

Por otro lado, podemos obtener el sistema original a partir de la última matriz, utilizando el mismo tipo de operaciones elementales de renglón, esto es,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & 20 & 104 \\ 23 & 0 & 69 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 8 & 20 & 104 \\ 15 & -20 & -35 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{\frac{1}{4}R_1 \\ \frac{1}{5}R_2}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 26 \\ 3 & -4 & -7 \end{array} \right].$$

Se deja de ejercicio justificar que los sistemas $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 26 \\ 3 & -4 & -7 \end{array} \right]$ y $\left[\begin{array}{cc|c} 8 & 20 & 104 \\ 23 & 0 & 69 \end{array} \right]$ tienen exactamente las mismas soluciones, por lo que el par $(x, y) = (3, 4)$ es la única solución del sistema inicial.

Ejemplo 7.2.3

La matriz aumentada del sistema de ecuaciones del Ejemplo 7.1.8 es $\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 1 \\ 13 & 9 & 3 \end{array} \right]$. Aplicando a esta matriz las operaciones que se realizaron a las ecuaciones del sistema, tenemos que

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 1 \\ 13 & 9 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{13R_1 \\ 3R_2}]{} \left[\begin{array}{cc|c} -39 & 26 & 13 \\ 39 & 27 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2+R_1} \left[\begin{array}{cc|c} -39 & 26 & 13 \\ 0 & 53 & 22 \end{array} \right].$$

Observemos que del segundo renglón de la última matriz obtenemos la ecuación $53y = 22$, que es la ecuación que habíamos obtenido en la solución del Ejemplo 7.1.8. De aquí obtenemos el valor $y = \frac{22}{53}$. Por otro lado, la

ecuación correspondiente al primer renglón de la última matriz aumentada es $-39x + 26y = 13$. Sustituyendo el valor $y = \frac{22}{53}$ en esta ecuación, podemos determinar el valor de x , esto es, $x = \frac{26y-13}{39} = -\frac{3}{53}$.

Por otro lado, podemos obtener el sistema original a partir de la última matriz, utilizando el mismo tipo de operaciones elementales de renglón, esto es,

$$\left[\begin{array}{cc|c} -39 & 26 & 13 \\ 0 & 53 & 22 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|c} -39 & 26 & 13 \\ 39 & 27 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow[\frac{1}{3}R_2]{\frac{1}{13}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 1 \\ 13 & 9 & 3 \end{array} \right].$$

Se deja de ejercicio justificar que los sistemas $\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 1 \\ 13 & 9 & 3 \end{array} \right]$ y $\left[\begin{array}{cc|c} -39 & 26 & 13 \\ 0 & 53 & 22 \end{array} \right]$ tienen exactamente las mismas soluciones, por lo que el par $(x, y) = \left(-\frac{3}{53}, \frac{22}{53}\right)$ es la única solución del sistema inicial.

Una de las ventajas que tiene la representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales, es que no tenemos que escribir las incógnitas a la hora de resolver el sistema como lo hemos visto en los Ejemplos 7.2.2 y 7.2.3. A continuación consideraremos el caso general de un sistema de $m \geq 1$ ecuaciones lineales en $n \geq 2$ incógnitas.

Sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas (7.2.4)

Un sistema de $m \geq 1$ ecuaciones lineales en $n \geq 2$ incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, es de la forma

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{7.3}$$

donde cada $a_{i,j}$ y cada b_i ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) es un número real o complejo.

Una tupla de números reales o complejos $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ es **solución** del sistema (7.3), si es solución de cada una de las ecuaciones del sistema, esto

es,

$$\begin{aligned} a_{1,1}s_1 + a_{1,2}s_2 + \cdots + a_{1,n}s_n &= b_1, \\ a_{2,1}s_1 + a_{2,2}s_2 + \cdots + a_{2,n}s_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m,1}s_1 + a_{m,2}s_2 + \cdots + a_{m,n}s_n &= b_m. \end{aligned}$$

La matriz de $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

es la **matriz de coeficientes** y la matriz de $m \times 1$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

es el **vector de términos independientes**.

La **matriz aumentada** del sistema es

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right].$$

El sistema de ecuaciones lineales (7.3) se puede reescribir de forma equivalente como $Ax = b$, donde x es el vector columna de las incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Cuando $b = 0$, el sistema $Ax = 0$ se llama **homogéneo**. Observamos que si $x = 0$, entonces $Ax = 0$, por lo que todo sistema homogéneo siempre tiene al menos la solución $x = 0$, la cual se llama **solución trivial**.

Ejemplo 7.2.5

Consideremos el siguiente sistema de 2 ecuaciones lineales y 2 incógnitas

con coeficientes complejos

$$\begin{aligned}(1+i)x - y &= i, \\ (1-i)x + (1+i)y &= 1.\end{aligned}$$

La matriz de coeficientes de este sistema es $\begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$, el vector de términos independientes es $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ y la matriz aumentada es $\left[\begin{array}{cc|c} 1+i & -1 & i \\ 1-i & 1+i & 1 \end{array} \right]$.

La representación matricial del sistema es $\begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Se deja de ejercicio verificar que el par $(x, y) = \left(\frac{1+i}{2}, 0\right)$ es solución del sistema.

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales (7.2.6)

Un sistema de ecuaciones lineales que tiene al menos una solución se llama **consistente**; un sistema sin solución se llama **inconsistente**. Para un sistema consistente se presentan dos posibilidades: o tiene solución única o tiene más de una solución. Un sistema consistente se llama **determinado** si tiene solución única e **indeterminado** si tiene más de una solución.

$$\text{Sistema de ecuaciones} \begin{cases} \text{Consistente} \begin{cases} \text{Determinado: } \mathbf{Solución\ única.} \\ \text{Indeterminado: } \mathbf{Más\ de\ una\ solución.} \end{cases} \\ \text{Inconsistente: } \mathbf{Sin\ solución.} \end{cases}$$

Ejemplo 7.2.7

Consideremos el sistema de 2 ecuaciones

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3,\end{aligned}$$

en las incógnitas x_1, x_2, x_3 . La representación matricial de este sistema es

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

De forma abreviada, tenemos que $Ax = b$, donde $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ es la matriz de coeficientes, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ es el vector de términos independientes y

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ es el vector de incógnitas. Este sistema tiene una infinidad de soluciones. Es fácil verificar que $x_1 = 2 - t$, $x_2 = -1 + t$ y $x_3 = t$ es una solución del sistema para cada número real t . Basta sustituir estos valores en cada ecuación del sistema.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2(2 - t) + 3(-1 + t) - t = 4 - 2t - 3 + 3t - t = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 - t - (-1 + t) + 2t = 2 - t + 1 - t + 2t = 3. \end{aligned}$$

Este es un ejemplo de un sistema consistente indeterminado.

Ejemplo 7.2.8

Consideremos el sistema de ecuaciones $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Observemos que la matriz de coeficientes está en forma escalonada y tiene 3 pivotes. El pivote 1 del primer renglón se corresponde con la incógnita x_1 , el pivote 2 del segundo renglón se corresponde con la incógnita x_2 y, el pivote 1 del tercer renglón, se corresponde con la incógnita x_3 . El sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 8, \\ 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 8, \\ x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 2. \end{aligned}$$

Para resolverlo, reescribamos cada ecuación dejando del lado derecho las

últimas $5 - 3 = 2$ variables, esto es,

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_3 &= 8 - 4x_4 - 5x_5, \\2x_2 + 2x_3 &= 8 - 4x_4 - 4x_5, \\x_3 &= 2 - 3x_4 - 4x_5.\end{aligned}$$

Ahora resolvemos para x_1 , x_2 y x_3 comenzando con la última ecuación y trabajando hacia atrás. El resultado es

$$\begin{aligned}x_3 &= 2 - 3x_4 - 4x_5, \\x_2 &= 4 - 2x_4 - 2x_5 - x_3 = 4 - 2x_4 - 2x_5 - (2 - 3x_4 - 4x_5) = 2 + x_4 + 2x_5, \\x_1 &= 8 - 4x_4 - 5x_5 - 2x_3 = 8 - 4x_4 - 5x_5 - 2(2 - 3x_4 - 4x_5) \\&= 4 + 2x_4 + 3x_5.\end{aligned}$$

Como x_4 y x_5 son arbitrarios, las soluciones del sistema son todas las tuplas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de la forma $(4 + 2s + 3t, 2 + s + 2t, 2 - 3s - 4t, s, t)$ donde s y t son cualesquiera números reales.

A continuación, generalizamos la técnica de solución de un sistema de ecuaciones lineales como el del Ejemplo 7.2.8.

Solución del sistema $Ax = b$ cuando las entradas $a_{r,s}$ de A son todas iguales a 0 si $r > s$ y las entradas $a_{r,r}$ son todas distintas de 0, donde A es de $m \times n$ con $m \leq n$ (7.2.9)

Si $m < n$, procedemos como sigue:

- 1) Las $n - m$ variables $x_{m+1}, \dots, x_n$ pueden tomar cualquier valor y las movemos al lado derecho de las ecuaciones.
- 2) Determinamos el valor de la última variable dependiente x_m a partir de la última ecuación.
- 3) Eliminamos esa variable sustituyendo su valor en el lugar donde aparezca en todas las ecuaciones anteriores.

- 4) Repetimos los pasos 2), 3) y 4) para la nueva última variable dependiente utilizando la nueva última ecuación y continuamos hasta que todas las variables dependientes hallan sido determinadas.

Si $m = n$, determinamos el valor de la última variable x_n utilizando la última ecuación. El valor encontrado lo sustituimos en la penúltima ecuación y determinamos el valor de la variable x_{n-1} . Con los valores ya encontrados de x_n y x_{n-1} , los sustituimos en la antepenúltima ecuación para determinar el valor de x_{n-2} . Continuando de esta forma, por sustitución hacia atrás, obtenemos los valores de todas las variables.

Actividad de Aprendizaje 7.2.10

- 1) (S) Verifica que cada tupla es solución del sistema de ecuaciones dado.
 - a) La terna $(x, y, z) = (19t - 35, 25 - 13t, t)$, donde t es cualquier número real, es solución del sistema de ecuaciones $2x + 3y + z = 5$, $5x + 7y - 4z = 0$.
 - b) La tupla $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2s + 12t + 13, s, -s - 3t - 3, t)$, donde s y t son cualesquiera números reales, es solución del sistema de ecuaciones $2x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 3x_4 = -1$, $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$.
- 2) (S) Escribe la matriz aumentada de cada sistema de ecuaciones lineales.
 - a) $x - 3y = 5, 2x + y = 1$.
 - b) $x + 2y = 0, y = 1$.
 - c) $x - y + z = 2, x - z = 1, y + 2x = 0$.
 - d) $x + y = 1, y + z = 0, z - x = 2$.
- 3) (S) Determina un sistema de ecuaciones lineales que tenga como matriz aumentada a cada una de las siguientes matrices.
 - a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$.
 - b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right]$.
- 4) (S) Determina las soluciones de cada sistema de ecuaciones utilizando matrices aumentadas. Sigue las ideas de los Ejemplos 7.2.2 y 7.2.3.
 - a) $x - 3y = 1, 2x - 7y = 3$.
 - b) $x + 2y = 1, 3x + 4y = -1$.
 - c) $2x + 3y = -1, 3x + 4y = 2$.

Actividad de Aprendizaje 7.2.10 (Continuación)

d) $3x + 4y = 1, 4x + 5y = -3.$

- 5) (S) Determina todas las soluciones de cada sistema de ecuaciones utilizando la técnica descrita en (7.2.9).

a) $2x + 3y = 6, 4y = 5.$

b) $2x + 3y + 6z = 6, 4y + 5z = 5, 6z = 6.$

c) $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6, 4x_2 + 5x_3 = 5, 6x_3 = 6, 4x_4 + 6x_5 = 2.$

d) $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, -2x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0.$

e)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- 6) (S) Determina números reales x, y, z y w tales que

$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ y & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determina una solución con $x > 0$ y una solución con $x < 0$.

- 7) (SA) Sean a y b números reales. Determina todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones.

$$x + y = a, y + z = b, z + w = a, w + x = b.$$

- 8) (SA) Sea A una matriz de $n \times n$ no singular.

a) Determina las soluciones del sistema de ecuaciones $Ax = 0$.

b) Determina las soluciones del sistema de ecuaciones $Ax = b$ para cualquier vector b de $n \times 1$.

- 9) (SA) Sea A una matriz de $m \times n$ y sean b, c vectores de $m \times 1$. Si los sistemas de ecuaciones $Ax = b$ y $Ax = c$ son consistentes, ¿es consistente el sistema $Ax = b + c$?

- 10) (SS) Sean A y B matrices de $m \times n$ y $n \times m$, respectivamente. Sea b un vector de $m \times 1$.

a) Si $AB = I_m$, explica por qué el sistema de ecuaciones $Ax = b$ tiene al menos una solución.

b) Si $BA = I_n$, explica por qué el sistema de ecuaciones $Ax = b$ tiene a lo más una solución.

7.3. Método de eliminación de Gauss

Dos sistemas de ecuaciones lineales se dice que son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

Un sistema de ecuaciones lineales se resuelve escribiendo una serie de sistemas, uno tras otro, cada uno equivalente al sistema anterior. Cada uno de estos sistemas tiene exactamente las mismas soluciones que el original y, el objetivo, es terminar con un sistema de ecuaciones que sea fácil de resolver. Cada sistema en esta serie de sistemas se obtiene del sistema anterior aplicando exactamente una operación elemental de renglón de tal manera que no cambia el conjunto de soluciones, como lo veremos en el siguiente resultado.

Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes (7.3.1)

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz aumentada es $[A \mid b]$. Supongamos que aplicamos exactamente una operación elemental de renglón R a la matriz $[A \mid b]$ y obtenemos la matriz $[A' \mid b']$. Entonces, la matriz $[A \mid b]$ se puede obtener a partir de la matriz $[A' \mid b']$ utilizando la operación de renglón inversa de la operación R . En símbolos,

$$[A \mid b] \xrightarrow{R} [A' \mid b'] \xrightarrow{R'} [A \mid b],$$

donde R' es la operación inversa de la operación elemental R .

Si R es la operación de intercambio de dos renglones en la matriz $[A \mid b]$, entonces R' intercambia los mismos renglones en la matriz $[A' \mid b']$.

Si R es la operación de multiplicar el renglón i de $[A \mid b]$ por una constante $c \neq 0$, entonces R' es la operación de multiplicar el renglón i de $[A' \mid b']$ por la constante $\frac{1}{c}$.

Si R es la operación de sumar c veces el renglón i al renglón j , con $i \neq j$, en la matriz $[A \mid b]$, entonces R' es la operación de sumar $-c$ veces el renglón i al renglón j en la matriz $[A' \mid b']$.

Aplicando el Ejercicio 9 de la actividad de aprendizaje de esta sección, concluimos que los sistemas de ecuaciones $[A \mid b]$ y $[A' \mid b']$ tienen exactamente las mismas soluciones, esto es, son equivalentes.

Ejemplo 7.3.2

Consideremos el sistema de ecuaciones cuya matriz aumentada es $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right]$. Llevando a esta matriz a su forma escalonada reducida por renglones, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{R_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{(1/5)R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 + R_2} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

De acuerdo con la Propiedad (7.3.1), cada uno de los sistemas que se obtuvo en el proceso de reducción es equivalente al sistema anterior. De hecho, podemos ver que

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{5R_2} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_{12}} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Esto significa que las soluciones del sistema inicial formado por las ecuaciones $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$ y $x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$, son exactamente las mismas soluciones del sistema final formado por las ecuaciones $x_1 + x_3 = 2$ y $x_2 - x_3 = -1$. La ventaja del sistema final es que es más fácil de resolver.

El resultado (7.3.1) es la base del método de eliminación de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Método de eliminación de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones lineales (7.3.3)

Sea A una matriz de $m \times n$ de rango r . Para resolver el sistema de ecuaciones lineales $[A \mid b]$ por el método de eliminación de Gauss, seguimos los siguientes pasos:

- 1) Llevamos la matriz $[A \mid b]$ a una forma escalonada $[E \mid c]$ usando el método de eliminación de Gauss (6.7.5). De acuerdo con (7.3.1), los sistemas $[A \mid b]$ y $[E \mid c]$ son equivalentes.
- 2) Si la matriz $[E \mid c]$ tiene un renglón de la forma $[0 \dots 0 \mid \alpha]$ con $\alpha \neq 0$, los sistemas equivalentes $[A \mid b]$ y $[E \mid c]$ son inconsistentes.
- 3) Si la matriz $[E \mid c]$ no tiene un renglón de la forma $[0 \dots 0 \mid \alpha]$ con $\alpha \neq 0$, los sistemas equivalentes $[A \mid b]$ y $[E \mid c]$ son consistentes. Identificamos las **variables básicas** y las **variables libres**.
 - a) Las r variables básicas corresponden a las columnas de la matriz E que contienen los pivotes.
 - b) Las variables libres corresponden a las columnas de la matriz E que no contienen pivotes.
- 4) Mediante sustitución hacia atrás resolvemos el sistema $[E \mid c]$ escribiendo las variables básicas en términos de las variables libres. Las soluciones del sistema $[E \mid c]$ son las soluciones del sistema $[A \mid b]$.

Ejemplo 7.3.4

Resolver, por el método de eliminación de Gauss, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 6x + 2y &= 10, \\ 3x + y &= 6. \end{aligned}$$

Solución. Comenzamos calculando una forma escalonada de la matriz aumentada del sistema de ecuaciones. El resultado es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - (1/2)R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Como la matriz escalonada tiene un renglón de la forma $[0 \ 0 \mid \alpha]$ con $\alpha \neq 0$, concluimos que el sistema es inconsistente. ■

Ejemplo 7.3.5

Resolver, por el método de eliminación de Gauss, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0, \\ 2x - 2y &= 6, \\ x + 3y &= -5. \end{aligned}$$

Solución. Primero determinamos una forma escalonada de la matriz aumentada del sistema. El resultado es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 - \frac{1}{2}R_1]{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 5/2 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 + \frac{5}{6}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [E | c].$$

Como la matriz $[E | c]$ no tiene un renglón de la forma $[0 \dots 0 | \alpha]$ con $\alpha \neq 0$, el sistema es consistente. Las dos variables x, y son básicas pues ambas columnas de la matriz E contienen pivotes. Esto significa que no hay variables libres. Ahora, por sustitución hacia atrás resolvemos el sistema $[E | c]$. Del segundo renglón tenemos la ecuación $-3y = 6$, de donde $y = -2$. Del primer renglón tenemos la ecuación $2x + y = 0$. Sustituyendo el valor que obtuvimos para y , resulta que $2x = 2$, de donde $x = 1$. Por lo tanto, el sistema es consistente determinado cuya única solución es $(x, y) = (1, -2)$. ■

Ejemplo 7.3.6

Determinar una condición sobre los números a, b y c para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= a, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= b, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= c, \end{aligned}$$

sea consistente. Cuando se satisfaga esa condición, determinar todas las soluciones del sistema en términos de a, b y c .

Solución. Usaremos el método de eliminación de Gauss. Llevando a la matriz

aumentada a una forma escalonada, tenemos que

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ -1 & -2 & 1 & b \\ 3 & 7 & -1 & c \end{array} \right] \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & a+b \\ 0 & -2 & -4 & c-3a \end{array} \right] \xrightarrow{R_3+2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & c-a+2b \end{array} \right].$$

De acuerdo con el método de eliminación de Gauss, el sistema es inconsistente si $c - a + 2b \neq 0$, esto es, el sistema es consistente si y solo si $c = a - 2b$. En este caso, tenemos el sistema equivalente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [E \mid c].$$

Como las columnas 1 y 2 de E contienen a los pivotes, las variables básicas son x_1 , x_2 y, la variable libre es x_3 . Las ecuaciones del sistema $[E \mid c]$ son $x_1 + 3x_2 + x_3 = a$ y $x_2 + 2x_3 = a + b$. Por sustitución hacia atrás, escribimos a las variables x_1 y x_2 en términos de la variable x_3 . De la segunda ecuación, $x_2 = a + b - 2x_3$ y, sustituyendo en la primera ecuación, resulta que

$$x_1 = a - x_3 - 3x_2 = a - x_3 - 3(a + b - 2x_3) = -2a - 3b + 5x_3.$$

Por lo tanto, cuando $c = a - 2b$, las soluciones del sistema son las ternas de la forma $(x_1, x_2, x_3) = (-2a - 3b + 5t, a + b - 2t, t)$ donde t es cualquier número real. ■

El rango de la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, nos puede dar información a cerca de la consistencia o inconsistencia del sistema, como lo veremos en el siguiente resultado.

Consistencia e inconsistencia (7.3.7)

Sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones lineales donde A es una matriz de $m \times n$ de rango r . Entonces

- 1) El rango de la matriz $[A \mid b]$ es r o $r + 1$.
- 2) El sistema $Ax = b$ es consistente si y solo si el rango de la matriz $[A \mid b]$ es r . En este caso
 - a) El conjunto de soluciones involucra exactamente $n - r$ variables libres.

- b) Si $r < n$, el sistema tiene una infinidad de soluciones.
 c) Si $r = n$, el sistema tiene solución única.
- 3) El sistema $Ax = b$ es inconsistente si y solo si el rango de la matriz $[A \mid b]$ es $r + 1$.

Ejemplo 7.3.8

Consideremos la matriz $[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 8 \end{array} \right]$. Según el

Ejemplo 6.7.16, una forma escalonada de la matriz $[A \mid b]$ es $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$, por lo que las matrices A y $[A \mid b]$ tienen rango $r = 2$.

Luego, por la Propiedad (7.3.7) el sistema $Ax = b$ es consistente y el conjunto de soluciones de este sistema tendrá $n - r = 3 - 2 = 1$ variable libre. Se deja de ejercicio verificar este hecho directamente aplicando el método de eliminación de Gauss a la matriz $[A \mid b]$.

A continuación describiremos las soluciones de un sistema consistente $Ax = b$ en términos de las soluciones del sistema homogéneo asociado $Ax = 0$.

Soluciones de un sistema consistente

(7.3.9)

Supongamos que x_1 es una solución particular del sistema $Ax = b$. Si x_2 es cualquier solución del sistema $Ax = b$, entonces $Ax_2 = b$. Haciendo $x_0 = x_2 - x_1$, entonces $x_2 = x_0 + x_1$ y

$$Ax_0 = A(x_2 - x_1) = Ax_2 - Ax_1 = b - b = 0,$$

esto es, x_0 es una solución del sistema homogéneo asociado $Ax = 0$.

Lo anterior lo podemos resumir de la siguiente manera: Si x_1 es una solución particular del sistema $Ax = b$, entonces cualquier otra solución x_2 tiene la forma $x_2 = x_0 + x_1$, donde x_0 es una solución del sistema homogéneo asociado $Ax = 0$.

Ejemplo 7.3.10

Expresar cada solución del siguiente sistema de ecuaciones como la suma de una solución particular más una solución del sistema homogéneo asociado.

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2, \\2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 6, \\x_1 - 2x_3 + x_4 &= 4.\end{aligned}$$

Solución. Aplicando el método de eliminación de Gauss (7.3.3), obtenemos las soluciones $x_1 = 4 + 2s - t$, $x_2 = 2 + s + 2t$, $x_3 = s$ y $x_4 = t$, donde s y t son números reales arbitrarios. Entonces, la solución general del sistema puede ser escrita como

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 2s - t \\ 2 + s + 2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Una solución particular del sistema es $x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ que se obtiene con $s = t = 0$.

Para cada par de números reales s y t , $x_0 = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es una solución del sistema homogéneo asociado. ■

Concluimos esta sección con un resultado útil a cerca de matrices invertibles. La definición de matriz invertible (6.5.1) requiere dos condiciones para que una matriz cuadrada A sea invertible. El siguiente resultado muestra que basta con una de las dos condiciones para que exista la inversa de una matriz.

Caracterización de una matriz invertible

(7.3.11)

Si A y B son matrices de $n \times n$ tales que $AB = I_n$, entonces $BA = I_n$. En particular, ambas matrices A y B son invertibles, $B = A^{-1}$ y $A = B^{-1}$.

Observación 7.3.12

La justificación de la Propiedad (7.3.11) no es trivial. Se requiere de la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales. En el Ejercicio 10 de la Actividad de Aprendizaje 7.3.13 se dan algunas ideas de cómo justificar este resultado.

Actividad de Aprendizaje 7.3.13

- 1) (S) Determina las soluciones de cada sistema de ecuaciones cuya matriz aumentada está en forma escalonada.

$$\text{a) } \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{b) } \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

- 2) (S) Determina todas las soluciones, si existen, de cada sistema de ecuaciones. Utiliza el método de eliminación de Gauss (7.3.3).

- a) $x + y + 2z = 8, 3x - y + z = 0, -x + 3y + 4z = -4.$
 b) $-2x + 3y + 3z = -9, 3x - 4y + z = 5, -5x + 7y + 2z = -14.$
 c) $x + y + z = 10, -x + 4y + 5z = -5, x + 6y + 3z = 15.$
 d) $x + 2y - z = 2, 2x + 5y - 3z = 1, x + 4y - 3z = 3.$
 e) $5x + y = 2, 3x - y + 2z = 1, x + y - z = 5.$
 f) $3x - 2y + z = -2, x - y + 3z = 5, -x + y + z = -1.$
 g) $x + y + z = 2, x + z = 1, 2x + 5y + 2z = 7.$
 h) $x + 2y - 4z = 10, 2x - y + 2z = 5, x + y - 2z = 7.$
 i) $x - 3y + 5z = 17, y - 2(z - x) = 5, x + y + 2(z - 3y + 4) = 66.$

- 3) (S) Determina todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Utiliza el método de eliminación de Gauss (7.3.3).

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 - 14x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 10x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 12x_4 = 1. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 7x_2 + 7x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_1 - 8x_2 - 8x_3 - x_4 = -1. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{array} \right.$$

- 4) (S) Determina todos los números reales a y b tales que el sistema de ecuaciones $x + 2y = 3$, $-x + 3y = 1$ sea equivalente al sistema de ecuaciones $x + ay = 2$, $-x + 2y = b$.
- 5) (SA) En cada caso determina, si es posible, condiciones sobre a y b para que el sistema sea: inconsistente, consistente determinado y consistente indeterminado.
- a) $x - 2y = 1$, $ax + by = 5$.
 - b) $x + by = -1$, $ax + 2y = 5$.
 - c) $x - by = -1$, $x + ay = 3$.
 - d) $ax + y = 1$, $2x + y = b$.
- 6) (SA) En cada caso determina, si es posible, condiciones sobre a , b y c para que el sistema sea: inconsistente, consistente determinado y consistente indeterminado.
- a) $3x + y - z = a$, $x - y + 2z = b$, $5x + 3y - 4z = c$.
 - b) $2x + y - z = a$, $2y + 3z = b$, $x - z = c$.
 - c) $-x + 3y + 2z = -8$, $x + z = 2$, $3x + 3y + az = b$.
 - d) $x + ay = 0$, $y + bz = 0$, $z + cx = 0$.
 - e) $3x - y + 2z = 3$, $x + y - z = 2$, $2x - 2y + 3z = b$.
 - f) $x + ay - z = 1$, $-x + (a - 2)y + z = -1$, $2x + 2y + (a - 2)z = 1$.
- 7) (SA) Utiliza el método de eliminación de Gauss para resolver cada sistema de ecuaciones y expresa cada solución como la suma de una solución particular más una solución del sistema homogéneo asociado.
- a) $x + y + z = 2$, $2x + y = 3$, $x - y - 3z = 0$.
 - b) $x - y - 4z = -4$, $x + 2y + 5z = 2$, $x + y + 2z = 0$.
 - c) $x_1 + x_2 - x_3 - 5x_5 = 2$, $x_2 + x_3 - 4x_5 = -1$, $x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -1$, $2x_1 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 6$.
 - d) $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1$, $3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -2$, $-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$, $-2x_1 - x_2 + 2x_4 = 3$.
- 8) (SA) Juan tiene 96 canicas repartidas en 3 bolsas. De la primera bolsa pasa a la segunda tantas canicas como tiene esta segunda y, de la segunda pasa a la tercera, tantas canicas como hay en esta tercera. Finalmente, pasa de la tercera a la primera tantas canicas como las que quedaron en la primera. Después de esto, se da cuenta que en cada una de las tres bolsas hay la misma cantidad de canicas. ¿Cuántas canicas había en cada una de las bolsas antes de hacer los intercambios?

Actividad de Aprendizaje 7.3.13 (Continuación)

9) (SA) Considera el sistema de ecuaciones $Ax = b$ y supón que

$$[A \mid b] \xrightarrow{R} [A' \mid b'] \xrightarrow{R'} [A \mid b],$$

donde R es una operación elemental de renglón y R' es la operación de renglón inversa de R (ver la Propiedad 7.3.1). Justifica cada una de las siguientes afirmaciones.

- Si R es una operación de tipo 1, entonces x_0 es solución del sistema $Ax = b$ si y solo si x_0 es solución del sistema $A'x = b'$.
 - Si R es una operación de tipo 2, entonces x_0 es solución del sistema $Ax = b$ si y solo si x_0 es solución del sistema $A'x = b'$.
 - Si R es una operación de tipo 3, entonces x_0 es solución del sistema $Ax = b$ si y solo si x_0 es solución del sistema $A'x = b'$.
- 10) (SS) El objetivo de este ejercicio es justificar la Propiedad (7.3.11). Sean A y B matrices de $n \times n$ tales que $AB = I$, donde I denota la matriz identidad de $n \times n$.
- Explica por qué el sistema homogéneo $Bx = 0$ solo tiene la solución trivial.
 - Explica por qué la forma escalonada reducida de la matriz B es la matriz I . (Si R es la forma escalonada reducida de B y R no fuera la matriz I , explica por qué el sistema $Bx = 0$ tendría una infinidad de soluciones).
 - Explica por qué el sistema $Bx = b$ es consistente para cada vector b de $n \times 1$. (Usa el inciso anterior y el método de eliminación de Gauss).
 - Por el inciso anterior, para cada $i = 1, \dots, n$, el sistema $Bx = I_{*i}$ es consistente, donde I_{*i} denota la i -ésima columna de la matriz I . Sea c_i una solución del sistema $Bx = I_{*i}$ para cada $i = 1, \dots, n$. Considera la matriz C cuya i -ésima columna es c_i , esto es, $C = [c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_n]$. Explica por qué $BC = I$. (Usa la Observación 6.3.3-1) para determinar el producto BC).
 - Usando que $BC = I$, explica por qué $A = C$ y concluye que $BA = I$.
- 11) (SS) Da un ejemplo de una matriz A de 2×3 y una matriz B de 3×2 tales que $AB = I_2$ pero que $BA \neq I_3$. ¿Contradice esto la Propiedad (7.3.11)?
- 12) (SS) Sean $N_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $N_s = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrices de $m \times n$, donde I_r e I_s son las matrices identidad de tamaños $r \times r$ y $s \times s$, respectivamente. Si P y Q son matrices invertibles tales que $PN_rQ = N_s$, explica por qué $r = s$.

7.4. Método de eliminación de Gauss-Jordan

El método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones lineales, es una variante del método de eliminación de Gauss (7.3.3). La única diferencia es que en lugar de trabajar con una forma escalonada de la matriz aumentada del sistema, trabajamos con la (única) forma escalonada reducida de dicha matriz. A continuación describimos el método.

Método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones lineales (7.4.1)

Sea A una matriz de $m \times n$ de rango r . Para resolver el sistema de ecuaciones lineales $[A \mid b]$ por el método de eliminación de Gauss-Jordan, seguimos los siguientes pasos:

- 1) Llevamos la matriz $[A \mid b]$ a su forma escalonada reducida $[E_A \mid c]$ usando el método de eliminación de Gauss Jordan (6.7.10). De acuerdo con (7.3.1), todos los sistemas que se obtienen en el proceso de reducción, son equivalentes.
- 2) Si durante el proceso de reducción aparece un renglón de la forma $[0 \dots 0 \mid \alpha]$ con $\alpha \neq 0$, el sistema $[A \mid b]$ es inconsistente.
- 3) En caso contrario, el sistema $[A \mid b]$ es consistente. Identificamos las **variables básicas** y las **variables libres**.
 - a) Las r variables básicas corresponden a las columnas de la matriz E_A que contienen los pivotes.
 - b) Las variables libres corresponden a las columnas de la matriz E_A que no contienen pivotes.
- 4) Despejando las variables básicas en términos de las variables libres, resolvemos el sistema $E_A x = c$.

Ejemplo 7.4.2

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned}x + y + z &= 5, \\2x + 3y + 5z &= 8, \\4x + 5z &= 2.\end{aligned}$$

Solución. Primero determinamos la forma escalonada reducida de la matriz aumentada del sistema. El resultado es

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array} \right] & \xrightarrow[\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & -18 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_3+4R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\frac{1}{13}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] & \xrightarrow[\substack{R_2-3R_3 \\ R_1-R_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{R_1-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right].\end{aligned}$$

Como las 3 columnas de la forma escalonada reducida de la matriz de coeficientes contienen los pivotes, las 3 variables son básicas y, por ende, no hay variables libres. De la última matriz obtenemos la única solución del sistema $(x, y, z) = (3, 4, -2)$. ■

Ejemplo 7.4.3

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 2, \\6x + 3y - 9z &= 6, \\7x + 14y - 21z &= 13.\end{aligned}$$

Solución. Empezamos llevando a la matriz aumentada del sistema a su forma escalonada reducida.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 6 & 3 & -9 & 6 \\ 7 & 14 & -21 & 13 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{R_2-6R_1 \\ R_3-7R_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -9 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right].$$

Como en el proceso de reducción obtuvimos un renglón de la forma $[0 \ 0 \ 0 \mid -1]$, el sistema es inconsistente. ■

Ejemplo 7.4.4

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned}4y + z &= 2, \\2x + 6y - 2z &= 3, \\4x + 8y - 5z &= 4.\end{aligned}$$

Solución. Llevando a la matriz aumentada del sistema a su forma escalonada reducida, obtenemos que

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -5 & 4 \end{array} \right] &\xrightarrow[\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_3 - 2R_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \end{array} \right] &\xrightarrow{R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\frac{1}{4}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{R_1 - 6R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -7/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].\end{aligned}$$

La última matriz $[E_A \mid c]$ es la forma escalonada reducida de la matriz aumentada del sistema $[A \mid b]$. Como hay 2 pivotes en las primeras dos columnas de E_A , las variables básicas son x, y . La única variable libre es z . Las ecuaciones del sistema $[E_A \mid c]$ son $x - \frac{7}{4}z = 0$ y $y + \frac{1}{4}z = \frac{1}{2}$. Escribiendo a las variables básicas x, y en términos de la variable libre z , obtenemos que $x = \frac{7}{4}z$ y $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z$. Haciendo $z = t$, obtenemos las soluciones $x = \frac{7}{4}t, y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t, z = t$, por lo que el sistema tiene una infinidad de soluciones. ■

Ejemplo 7.4.5

Utilizar el método de Gauss-Jordan para determinar todas las parejas de números complejos (x, y) que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}(1 + i)x - y &= i, \\(1 - i)x + (1 + i)y &= 1.\end{aligned}$$

Solución. Llevando a la matriz aumentada del sistema a su forma escalonada reducida, obtenemos que

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+i & -1 & i \\ 1-i & 1+i & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{1+i}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i-1}{2} & \frac{i+1}{2} \\ 1-i & 1+i & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2+(i-1)R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i-1}{2} & \frac{i+1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{R_1+(\frac{1-i}{2})R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{i+1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

De la última matriz podemos ver que las dos variables son básicas y que la única solución del sistema es el par $(x, y) = \left(\frac{i+1}{2}, 0\right)$. ■

Actividad de Aprendizaje 7.4.6

- 1) (S) Resuelve cada sistema de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss-Jordan (7.4.1).

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1. & \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 5. \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases} \end{array}$$

- 2) (S) Utiliza el método de eliminación de Gauss-Jordan (7.4.1) para resolver los siguientes sistemas homogéneos.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

- 3) (S) Determina los valores de a , b y c para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + ay + cz &= 0, \\ bx + cy - 3z &= 1, \\ ax + 2y + bz &= 5, \end{aligned}$$

solo tenga la solución $x = 3, y = -1$ y $z = 2$.

Actividad de Aprendizaje 7.4.6 (Continuación)

- 4) (S) Utiliza el método de Gauss-Jordan (7.4.1) para determinar todas las ternas de números complejos (x, y, z) que satisfacen el sistema

$$x + 2y + 2z = -3,$$

$$2x + y + z = -4,$$

$$x - y + iz = i.$$

- 5) (SA) Determina una matriz A de tal manera que el conjunto solución del sistema $Ax = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}$ sea $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$.
- 6) (SA) Explica por qué un sistema de 10 ecuaciones lineales con 11 incógnitas no puede tener solución única.
- 7) (SS) Sea A una matriz de 2×1 y sea B una matriz de 1×2 . Determina si el producto AB de 2×2 es o no invertible.
- 8) (SS) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones no lineales.

$$x^2 + xy - y^2 = 1,$$

$$2x^2 - xy + 3y^2 = 13,$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0.$$

(Haz un cambio de variables para convertir el sistema a un sistema de ecuaciones lineales).

- 9) (SS) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & a & a \\ -1 & -a & b \end{bmatrix}$. Determina los valores de a y b tales que el sistema homogéneo $Ax = 0$:
- Tenga solución única.
 - Tenga una infinidad de soluciones y una variable libre.
 - Tenga una infinidad de soluciones y dos variables libres.
- 10) (SS) Sea $n > 2$ un número entero. Determina las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones.

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad x_3 = \frac{x_2 + x_4}{2}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{x_{n-2} + x_n}{2}.$$

CAPÍTULO 8

DETERMINANTES

Con cada matriz cuadrada podemos calcular un número, llamado el **determinante** de la matriz, con el cual podemos determinar si la matriz es o no invertible. De hecho, los determinantes se pueden utilizar para dar una fórmula para la inversa de una matriz. Los determinantes fueron estudiados primero por Leibnitz en 1696 y el término “determinante” fue utilizado por primera vez en 1801 por Gauss en sus *Disquisitiones Arithmeticae*. Los determinantes son mucho más antiguos que las matrices (las cuales fueron introducidas por Cayley en 1878) y fueron usados extensamente en los siglos XVIII y XIX, principalmente por su significado en geometría. Aunque hoy en día son menos importantes, los determinantes juegan un papel en la teoría y aplicaciones del álgebra matricial.

8.1. Determinantes de orden 2

Determinante de una matriz de 2×2 (8.1.1)

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, el **determinante** de A , denotado por $\det A$ o por $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, está definido por

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

De acuerdo con la Propiedad (6.5.9), tenemos que A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$ y, en este caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 8.1.2 Determinante de la matriz identidad de orden 2

El determinante de la matriz $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$.

Ejemplo 8.1.3

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, entonces

$$\det A = 2(-1) + 1(1) = -2 + 1 = -1 \quad \text{y} \quad \det B = 1(1) - 4(1) = 1 - 4 = -3.$$

Por otro lado, tenemos que $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, lo cual implica que

$$\det(A + B) = 3(0) - 2(5) = -10 \neq -1 - 3 = -4 = \det A + \det B.$$

Este ejemplo muestra que, en general, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

Ejemplo 8.1.4 Determinante de la transpuesta de una matriz de orden 2

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $\det(A^T) = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - cb = \det A$.

En otras palabras, el determinante de una matriz de orden 2 coincide con el determinante de su transpuesta.

Ejemplo 8.1.5

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$, entonces $\det A = 2(8) - 4(-3) = 28$. Más aún, como $\det A \neq 0$, podemos concluir que A es invertible y que

$$A^{-1} = \frac{1}{28} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 & -1/7 \\ 3/28 & 1/14 \end{bmatrix}.$$

También podemos ver que

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}) &= \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{14} - \left(-\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{28} \right) = \frac{2}{7(14)} - \left(-\frac{3}{7(28)} \right) = \frac{4+3}{7(28)} = \frac{7}{7(28)} \\ &= \frac{1}{28} = 28^{-1} = (\det A)^{-1}. \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo es una generalización.

Ejemplo 8.1.6 Determinante de la inversa de una matriz de orden 2

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es invertible, entonces, de acuerdo con (8.1.1), tenemos que $\det A \neq 0$ y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/\det A & -b/\det A \\ -c/\det A & a/\det A \end{bmatrix},$$

por lo que

$$\det(A^{-1}) = \left(\frac{d}{\det A} \cdot \frac{a}{\det A} \right) - \left(\frac{-b}{\det A} \cdot \frac{-c}{\det A} \right) = \frac{\det A}{(\det A)^2} = (\det A)^{-1}.$$

Ejemplo 8.1.7 Determinante de un producto de matrices de 2×2

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, entonces $AB = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}$, lo cual

implica que

$$\begin{aligned}
 \det(AB) &= (ax + bz)(cy + dw) - (ay + bw)(cx + dz) \\
 &= axcy + axdw + bzcy + bzdw - (aycx + aydz + bwcx + bwdz) \\
 &= axdw + bzcy - (aydz + bwcx) \\
 &= (axdw - aydz) + (bzcy - bwcx) \\
 &= ad(xw - yz) + bc(z y - wx) \\
 &= (xw - yz)(ad - bc) \\
 &= (\det A)(\det B).
 \end{aligned}$$

En los siguientes tres ejemplos, veremos la relación que hay entre el determinante de una matriz A de 2×2 y el determinante de la matriz que se obtiene al aplicar una operación elemental de renglón a la matriz A .

Ejemplo 8.1.8

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = B$, entonces

$$\det B = bc - ad = -(ad - bc) = -\det A.$$

En otras palabras, al aplicar una operación elemental de renglón tipo 1 a una matriz de 2×2 , el determinante de la matriz resultante es igual al determinante de la matriz original pero de signo contrario.

Ejemplo 8.1.9

Si $k \neq 0$ y $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{kR_1} \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix} = B$, entonces

$$\det B = kad - kbc = k(ad - bc) = k(\det A).$$

De manera análoga, si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{kR_2} \begin{bmatrix} a & b \\ kc & kd \end{bmatrix} = B$, entonces

$$\det B = akd - bkc = k(ad - bc) = k(\det A).$$

En otras palabras, al aplicar una operación elemental de renglón tipo 2, kR_1

o kR_2 , a una matriz de 2×2 , el determinante de la matriz resultante se obtiene multiplicando por k al determinante de la matriz original.

Ejemplo 8.1.10

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + kR_2} \begin{bmatrix} a + kc & b + kd \\ c & d \end{bmatrix} = B$, entonces

$$\det B = (a + kc)d - (b + kd)c = ad + kcd - bc - kdc = ad - bc = \det A.$$

De manera análoga, si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + kR_1} \begin{bmatrix} a & b \\ c + ka & d + kb \end{bmatrix} = B$, entonces

$$\det B = a(d + kb) - b(c + ka) = ad + akb - bc - bka = ad - bc = \det A.$$

En otras palabras, al aplicar una operación elemental tipo 3 a una matriz de 2×2 , el determinante de la matriz resultante es igual al determinante de la matriz original.

Ejemplo 8.1.11 Determinante de un producto de matriz por escalar

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y k es un número real o complejo, entonces

$$\det(kA) = \det \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} = (ka)(kd) - (kb)(kc) = k^2(ad - bc) = k^2 \det A.$$

Actividad de Aprendizaje 8.1.12

1) (S) Determina el determinante de cada matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 + i & 1 - 4i \\ 3 + 2i & 2 - 3i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 - 2i & 6 + 4i \\ -3 + i & 7i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2i & 3 \\ 4 & 6i \end{bmatrix}.$$

- 2) (S) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$, determina el valor de $\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ 3c & 3d \end{vmatrix}$.
- 3) (S) Sea A una matriz de 2×2 . Si $\det A = -5$, determina el valor de $\det(2A^T)$.
- 4) (S) Da un ejemplo de dos matrices A y B de orden 2 tales que $A \neq B$ y $\det A = \det B$.
- 5) (S) Si A es una matriz de orden 2, definimos el **polinomio característico** de A como el polinomio $P_A(x) = \det(xI - A)$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.
- a) Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, determina $P_A(x)$ y $P_A(A)$.
- b) Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, determina $P_A(x)$ y $P_A(A)$.
- 6) (S) Si A es una matriz de 2×2 , determina $\det(-A)$.
- 7) (SA) Determina todos los números complejos z tales que para cada matriz invertible A de 2×2 de números complejos se cumple que

$$\det \left(A \begin{bmatrix} 2+i & z \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} A^{-1} \right) = 0.$$

- 8) (SA) Sean $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$.
- a) Determina AB y $\det(AB)$.
- b) Determina $(\det A)(\det B)$.
- c) ¿Qué puedes concluir de a) y b)?
- 9) (SA) La **adjunta** de una matriz $A = [a_{i,j}]$ de 2×2 es la matriz

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix}.$$

Verifica las siguientes propiedades de la adjunta de una matriz de 2×2 .

- a) $(\text{adj } A)A = A(\text{adj } A) = (\det A)I_2$.
- b) $\det(\text{adj } A) = \det A$.
- c) $\text{adj } A^T = (\text{adj } A)^T$.

Actividad de Aprendizaje 8.1.12 (Continuación)

- 10) (SS) Si A y B son matrices de 2×2 de números reales o complejos, determina $\det(A + B) + \det(A - B)$ en función de $\det A$ y $\det B$.
- 11) (SS) Sean A y B matrices de 2×2 de números reales. Si $\det(A + A^T) = 8$ y $\det(A + 2A^T) = 27$, determina el valor de $\det A$.
- 12) (SS) Sean A y B matrices de 2×2 de números reales o complejos. Si $A^2 + B^2 + 2AB = 0_2$ y $\det A = \det B$, determina el valor de $\det(A^2 - B^2)$.

8.2. Determinantes de orden n

Si A es una matriz invertible de 3×3 , buscaremos una definición adecuada para el determinante de A llevando a A a su forma escalonada reducida que es

I_3 . Sea $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Como A es invertible, la primera columna no puede ser

de puros ceros, por lo que podemos suponer que $a \neq 0$. Utilizando operaciones elementales de renglón, tenemos que

$$A \xrightarrow[aR_3]{aR_2} \begin{bmatrix} a & b & c \\ ad & ae & af \\ ag & ah & ai \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - gR_1]{R_2 - dR_1} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & ae - bd & af - cd \\ 0 & ah - bg & ai - cg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & u & af - cd \\ 0 & v & ai - cg \end{bmatrix} = B,$$

donde $u = ae - bd$ y $v = ah - bg$. De acuerdo con la Propiedad (6.6.17), podemos determinar una matriz invertible P tal que $B = PA$, lo que significa que B también es invertible (por ser producto de matrices invertibles). Entonces, $u \neq 0$ o $v \neq 0$. Supongamos que $u \neq 0$. Continuando con el proceso de reducción, tenemos que

$$A \longrightarrow B \xrightarrow{uR_3} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & u & af - cd \\ 0 & uv & u(ai - cg) \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - vR_2} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & u & af - cd \\ 0 & 0 & w \end{bmatrix} = C,$$

donde

$$w = u(ai - cg) - v(af - cd) = a(aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi).$$

Por la Propiedad (6.6.17), podemos determinar una matriz invertible P' tal que $C = P'A$, lo que significa que la matriz C también es invertible (por ser producto de matrices invertibles), lo cual implica que $w \neq 0$.

Definimos entonces

$$\det A = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi \quad (8.1)$$

y podemos observar que $\det A \neq 0$ ya que $a \neq 0$ y $a \det A = w \neq 0$.

Determinante de una matriz de 3×3 (8.2.1)

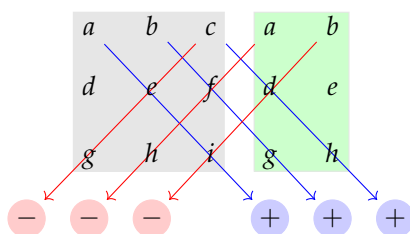
Para motivar la definición anterior, agruparemos los términos de la ecuación (8.1) que involucran las entradas a , b y c del renglón 1 de A .

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

En otras palabras, para calcular el determinante de una matriz de 3×3 , multiplicamos cada entrada del renglón 1 por el determinante de la matriz de 2×2 que se obtiene al eliminar el renglón y la columna que contiene tal entrada y, después, alternando signos comenzando con $+$, sumamos los resultados.

Observación 8.2.2

La fórmula $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$ se puede recordar fácilmente con el siguiente diagrama conocido como **Regla de Sarrus**.



La idea es escribir las primeras dos columnas de la matriz de 3×3 a la derecha de la última columna, obteniendo 5 columnas. Después se suman los productos de los números de las diagonales azules y se restan los productos de los números de las diagonales rojas.

Ejemplo 8.2.3

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -4 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2(-30) - 3(-6) + 7(-20) \\ = -182.$$

Ejemplo 8.2.4 Determinante de la matriz identidad de orden 3

$$\det I_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \det(I_2) = 1.$$

Observación 8.2.5

Observemos que la definición (8.2.1) del determinante de una matriz de orden 3, está en términos de determinantes de matrices de orden 2. Usaremos esta misma idea para definir el determinante de una matriz de orden n , a partir de determinantes de orden $n - 1$. Para esto, necesitamos nueva terminología.

Cofactores de una matriz (8.2.6)

Si A es una matriz de orden n , definimos la matriz $A_{i,j}$ de orden $n - 1$, que se obtiene eliminando el renglón i y la columna j de la matriz A . Entonces, el (i, j) -**cofactor**, denotado por $c_{i,j}(A)$, es el número definido por

$$c_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \det A_{i,j}.$$

El número $(-1)^{i+j}$ es llamado el **signo** de la posición (i, j) . El signo de una posición es 1 o -1 y el siguiente diagrama de signos es útil para recordarlo.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Observemos que los signos se alternan a lo largo de cada renglón y de cada columna iniciando con el signo $+$ en la esquina superior izquierda.

Ejemplo 8.2.7

Determinar los cofactores de las posiciones $(1, 2)$, $(3, 1)$ y $(2, 3)$ en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución. La matriz $A_{1,2}$ es $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ que se obtiene eliminando el renglón 1 y la columna 2 de A . El signo de la posición $(1, 2)$ es $(-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1$ (que también es la entrada $(1, 2)$ en el diagrama de signos), por lo que el $(1, 2)$ -cofactor es

$$c_{1,2}(A) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(5 \cdot 4 - 7 \cdot 8) = (-1)(-36) = 36.$$

Continuando con la posición $(3, 1)$, obtenemos que

$$c_{3,1}(A) = (-1)^{3+1} A_{3,1} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = (+1)(-7 - 12) = -19.$$

Por último, el $(2, 3)$ -cofactor es

$$c_{2,3}(A) = (-1)^{2+3} A_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(27 + 8) = -35.$$

Se pueden determinar otros cofactores, hay 9 en total, uno por cada posición en la matriz. ■

A continuación definimos el determinante de cualquier matriz cuadrada.

Determinante de una matriz de orden n (expansión por cofactores) (8.2.8)

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $n \times n$, definimos

$$\det A = a_{1,1}c_{1,1}(A) + a_{1,2}c_{1,2}(A) + \cdots + a_{1,n}c_{1,n}(A).$$

Esta expresión es llamada **expansión por cofactores** de $\det A$ a lo largo del renglón 1.

En otras palabras, el determinante de A se puede calcular multiplicando las entradas del renglón 1 por el correspondiente cofactor y sumando los resultados.

Lo sorprendente es que $\det A$ se puede calcular tomando la expansión por cofactores a lo largo de *cualquier renglón o columna*: Simplemente multiplicamos cada entrada de ese renglón o columna por el correspondiente cofactor y sumamos los resultados.

Ejemplo 8.2.9

Determinar el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & -6 \end{bmatrix}$ primero, a lo largo del renglón 1 y, después, a lo largo de la columna 1.

Solución. Realizando la expansión por cofactores a lo largo del renglón 1, obtenemos que

$$\begin{aligned} \det A &= 3c_{1,1}(A) + 4c_{1,2}(A) + 5c_{1,3}(A) = 3 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 3(-58) - 4(-24) + 5(-55) = -353. \end{aligned}$$

Ahora calcularemos $\det A$ expandiendo a lo largo de la primera columna. El resultado es

$$\begin{aligned} \det A &= 3c_{1,1}(A) + 1c_{2,1}(A) + 9c_{3,1}(A) = 3 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3(-58) - (-64) + 9(-27) = -353. \end{aligned}$$

Se invita al lector a calcular $\det A$ expandiendo a lo largo de cualquier otro renglón o de cualquier otra columna. ■

Observación 8.2.10

El hecho de que la expansión por cofactores a lo largo de cualquier renglón o de cualquier columna de una matriz A , siempre de el mismo resultado (el determinante de A), es notable por decir lo menos. La elección de un renglón o columna particular puede simplificar el cálculo.

Ejemplo 8.2.11

Determinar $\det A$ donde $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución. La primera elección que debemos hacer es cuál renglón o columna usar en la expansión por cofactores. Como la expansión por cofactores involucra multiplicar las entradas de la matriz por cofactores, reduciremos el trabajo cuando el renglón o columna tenga la mayor cantidad de ceros posible. Es claro que el renglón 1 o la columna 4 son las mejores opciones.

Utilizando el renglón 1, obtenemos que

$$\det A = 3c_{1,1}(A) + 0c_{1,2}(A) + 0c_{1,3}(A) + 0c_{1,4}(A) = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Esta es la primera etapa del cálculo y hemos logrado expresar el determinante de la matriz A de 4×4 en términos del determinante de una matriz de 3×3 . La siguiente etapa involucra esta matriz de 3×3 . Otra vez, podemos usar cualquier renglón o columna para la expansión por cofactores. La mejor opción es la tercera columna que tiene dos ceros. El resultado es

$$\det A = 3 \left(0 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \right) = 3(0 + 1(-5) + 0) = -15.$$



Calcular el determinante de una matriz A puede ser tedioso. Por ejemplo, si A es una matriz de 4×4 , la expansión por cofactores a lo largo de cualquier renglón o columna involucra determinar 4 cofactores, cada uno de los cuales involucra el determinante de una matriz de 3×3 . Si la matriz A es de 5×5 , la expansión a lo largo de cualquier renglón o columna involucra 5 determinantes de matrices de 4×4 . Esto muestra la necesidad de estudiar otras técnicas que reduzcan el trabajo.

Hemos visto que el cálculo de un determinante se simplifica considerablemente cuando hay un renglón o columna con la mayor cantidad posible de ceros. Recordemos que uno de los métodos para generar ceros en una matriz consiste en aplicar operaciones elementales de renglón a la matriz. Por lo tanto, una pregunta natural que surge es ¿qué efecto tiene una operación elemental de renglón sobre el determinante de una matriz? Resulta que el efecto es fácil de determinar y que las operaciones elementales de columna también se pueden utilizar. Estas observaciones conducen a una técnica para evaluar un determinante, que reduce en gran medida el trabajo involucrado. La información necesaria se muestra a continuación.

Operaciones elementales en el cálculo de determinantes (8.2.12)

Sea A una matriz de $n \times n$.

- 1) Si dos renglones (columnas) distintos de A son intercambiados, el determinante de la matriz obtenida es igual a $-\det A$.
- 2) Si un renglón (columna) de A se multiplica por un número c , el determinante de la matriz obtenida es igual a $c(\det A)$.
- 3) Si un múltiplo de un renglón de A se suma a otro renglón distinto (o si un múltiplo de una columna de A se suma a otra columna distinta), el determinante de la matriz obtenida es igual a $\det A$.

Los siguientes cinco ejemplos ilustran cómo utilizar las Propiedades (8.2.12) para evaluar determinantes.

Ejemplo 8.2.13

Evaluar $\det A$ donde $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Solución. Como la matriz tiene un cero en el segundo renglón, podríamos hacer la expansión por cofactores usando ese renglón. Sin embargo, podemos hacer una operación de columna para generar un cero en la posición $(2,3)$: sumar la columna 1 a la columna 3. Como esta operación no cambia el valor del determinante

(Propiedad (8.2.12)-5)), obtenemos que

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 12,$$

donde usamos la expansión por cofactores en la segunda matriz de 3×3 a lo largo del segundo renglón. ■

Ejemplo 8.2.14

Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$, evaluar $\det A$, donde $A = \begin{bmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ -p & -q & -r \end{bmatrix}$.

Solución. Primero factoricemos los factores comunes de los renglones 2 y 3. El resultado es

$$\det A = 3(-1) \det \begin{bmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x & y & z \\ p & q & r \end{bmatrix}.$$

Ahora restamos el segundo renglón del primero e intercambiamos los últimos dos renglones. El resultado es

$$\det A = -3 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{bmatrix} = 3 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = 3(6) = 18.$$

■

Ejemplo 8.2.15

Determinar todos los números reales x tales que $\det A = 0$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. Para evaluar $\det A$, primero restaremos x veces el renglón 1 de los renglones 2 y 3. El resultado es

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1-x^2 & x-x^2 \\ 0 & x-x^2 & 1-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x^2 & x-x^2 \\ x-x^2 & 1-x^2 \end{vmatrix}.$$

En este punto, podríamos simplemente evaluar el determinante de orden 2 que acabamos de obtener (el resultado es $2x^3 - 3x^2 + 1$). Sin embargo, tendríamos que factorizar este polinomio para determinar los valores de x que lo hacen igual a cero. Esta factorización la podemos obtener directamente factorizando primero cada entrada en el determinante de orden 2 y después tomando el factor común $1 - x$ en cada renglón. El resultado es

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} (1-x)(1+x) & x(1-x) \\ x(1-x) & (1-x)(1+x) \end{vmatrix} = (1-x)^2 \begin{vmatrix} 1+x & x \\ x & 1+x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)^2(2x+1).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\det A = 0$ significa que $(1-x)^2(2x+1) = 0$, esto es, $x = 1$ o $x = -\frac{1}{2}$. ■

Ejemplo 8.2.16 Determinante de la matriz de Vandermonde de orden 3

Si a, b y c son números reales o complejos, evaluar

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}.$$

Solución. Restando el renglón 1 de los renglones 2 y 3 y, expandiendo por cofactores a lo largo de la columna 1, obtenemos que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix}.$$

Como $b-a$ y $c-a$ son factores comunes en los renglones 1 y 2, respectivamente, concluimos que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a) \det \begin{bmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

■

Ejemplo 8.2.17 Determinante de una matriz con dos renglones iguales

Sea A una matriz cuadrada. Si A tiene dos renglones iguales, determinar el valor de su determinante.

Solución. Supongamos que el renglón i es igual al renglón j , con $i \neq j$. Si al renglón i le restamos el renglón j , la matriz obtenida tendrá un renglón de puros ceros. Luego, desarrollando por cofactores a lo largo de ese renglón, obtenemos que el determinante de la matriz obtenida es igual a 0. Ahora, por la Propiedad (8.2.12)-3), este determinante coincide con el determinante de la matriz A , lo que significa que $\det A = 0$. ■

El siguiente resultado es consecuencia de las Propiedades (8.2.12).

Determinantes de matrices elementales

(8.2.18)

Sea E una matriz elemental de $n \times n$ y sea I la matriz identidad de $n \times n$.

- 1) Si E se obtiene de la matriz identidad I al intercambiar dos renglones distintos, entonces $\det E = -\det I = -1$.
- 2) Si E se obtiene de la matriz identidad I al multiplicar un renglón por un número $c \neq 0$, entonces $\det E = c \det I = c$.
- 3) Si E se obtiene de la matriz identidad I al sumar c veces un renglón a otro renglón distinto, entonces $\det E = \det I = 1$.

Observación 8.2.19

Si E es una matriz elemental de tipo 1 o 2, entonces $E^T = E$ (ver Ejercicio 12 de la Sección 6.5), por lo que $\det E = \det E^T$.

Si E es una matriz elemental de tipo 3, entonces E^T también es una matriz elemental de tipo 3 (ver Ejercicio 12 de la Sección 6.5), de donde se sigue que $\det E = 1 = \det E^T$ según la Propiedad (8.2.18)-3).

Por lo tanto, tenemos que $\det E = \det E^T$ para cualquier matriz elemental E . Más adelante veremos que esta relación se verifica con cualquier matriz cuadrada.

El siguiente resultado es otra consecuencia de las Propiedades (8.2.12).

Determinante de matriz por escalar (8.2.20)

Si A es una matriz de $n \times n$ y c es un escalar, la matriz cA se forma multiplicando *cada* renglón de A por c . Entonces, por la Propiedad (8.2.12)-3), podemos factorizar el factor común c en cada renglón, obteniendo que

$$\det(cA) = c^n \det A.$$

El siguiente ejemplo nos muestra un tipo de matriz cuyo determinante es fácil de calcular.

Ejemplo 8.2.21

Evaluar $\det A$ si $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ u & b & 0 & 0 \\ v & w & c & 0 \\ x & y & z & d \end{bmatrix}$.

Solución. Expandiendo por cofactores a lo largo del primer renglón, tenemos que

$$\det A = a \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ w & c & 0 \\ y & z & d \end{vmatrix}.$$

Expandiendo nuevamente por cofactores a lo largo del primer renglón, obtenemos que

$$\det A = ab \begin{vmatrix} c & 0 \\ z & d \end{vmatrix} = abcd.$$

Esto es, el determinante de A es el producto de las entradas de la diagonal principal de A . ■

El Ejemplo 8.2.21 lo podemos generalizar.

Determinante de una matriz triangular (8.2.22)

Si A es una matriz triangular inferior o superior, entonces $\det A$ es el producto de las entradas de la diagonal principal de A .

Observación 8.2.23

La Propiedad (8.2.22) es útil en cálculos por computadora porque es una cuestión de rutina llevar una matriz cuadrada a una forma triangular usando operaciones elementales de renglón.

Las matrices en bloques, como las del siguiente resultado, surgen con frecuencia en la práctica. El siguiente resultado, da un método sencillo para calcular sus determinantes.

Determinante de una matriz en bloques (8.2.24)

Consideremos las matrices $\begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} A & 0 \\ Y & B \end{bmatrix}$ en forma de bloques, donde A y B son matrices cuadradas. Entonces,

$$\det \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B) \quad \text{y} \quad \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ Y & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B).$$

Ejemplo 8.2.25

Evaluar $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Solución. Intercambiando las columnas 2 y 3 y, utilizando la Propiedad (8.2.24), tenemos que

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\det \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right] = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -9.$$



Ejemplo 8.2.26 Identidad de Sylvester

Si X es una matriz de $m \times n$ y Y es una matriz de $n \times m$, entonces aplicando la Propiedad (8.2.24) tenemos que

$$\begin{aligned} \det(I_m + XY) &= \det \begin{bmatrix} I_m + XY & 0 \\ Y & I_n \end{bmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -X \\ Y & I_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} I_m & -X \\ Y & I_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I_m & -X \\ Y & I_n \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} I_m & -X \\ Y & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ Y & I_n + YX \end{bmatrix} \\ &= \det(I_n + YX). \end{aligned}$$

La relación $\det(I_m + XY) = \det(I_n + YX)$ es conocida como *identidad de Sylvester*.

Actividad de Aprendizaje 8.2.27

- 1) (S) Evalúa el determinante de cada matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ b & c & 1 \\ c & 1 & b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}.$$

- 2) (S) Evalúa el determinante de cada matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 12 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & p \\ 0 & c & q & k \\ d & s & t & u \end{bmatrix}.$$

- 3) (S) Evalúa el determinante de cada matriz reduciéndola primero a una

matriz triangular superior.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

4) (S) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -1$, determina

a) $\begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ 3p+a & 3q+b & 3r+c \\ 2p & 2q & 2r \end{vmatrix}.$

b) $\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix}.$

5) (SA) Determina $\det A$ si A es una matriz de 3×3 tal que $\det(2A) = 6$.

6) (SA) Evalúa los siguientes determinantes sumando primero el renglón 1 a los renglones 2 y 3.

a) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & x-2 \\ -2 & x & -2 \end{vmatrix}.$

b) $\begin{vmatrix} x-1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & x-1 \\ -3 & x+2 & -2 \end{vmatrix}.$

7) (SA) Si $\det A = 2$, $\det B = -1$ y $\det C = 3$, evalúa los determinantes de las siguientes matrices en bloques.

a) $\det \begin{bmatrix} A & X & Y \\ 0 & B & Z \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}.$

b) $\det \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ X & B & 0 \\ Y & Z & C \end{bmatrix}.$

c) $\det \begin{bmatrix} A & X & Y \\ 0 & B & 0 \\ 0 & Z & C \end{bmatrix}.$

d) $\det \begin{bmatrix} A & X & 0 \\ 0 & B & 0 \\ Y & Z & C \end{bmatrix}.$

8) (SA) Determina el valor de b si $\begin{vmatrix} 5 & -1 & x \\ 2 & 6 & y \\ -5 & 4 & z \end{vmatrix} = ax + by + cz$.

9) (SA) Determina el valor de c si $\begin{vmatrix} 2 & x & -1 \\ 1 & y & 3 \\ -3 & z & 4 \end{vmatrix} = ax + by + cz$.

10) (SA) Dado el polinomio $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + x^4$, la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c & -d \end{bmatrix}$$

es llamada **matriz compañera** de $p(x)$.

Determina $\det(xI_4 - C)$. ¿Qué relación hay entre $\det(xI_4 - C)$ y $p(x)$?

- 11) (SA) Evalúa el determinante de la matriz identidad de orden n .
- 12) (SA) Sea A una matriz de $n \times n$. Si A tiene un renglón o una columna de puros ceros, determina $\det A$.
- 13) (SA) Explica por qué el signo de la posición en el último renglón y la última columna de una matriz de $n \times n$ siempre es igual a $+1$.
- 14) (SA) Sea A una matriz de $n \times n$. ¿Bajo qué condiciones se cumple que $\det(-A) = \det A$?
- 15) (SA) Sea A una matriz de $n \times n$. Si A tiene dos columnas iguales, determina el valor de su determinante.

- 16) (SS) Determina todos los números reales x, y tales que $\det A = 0$ si

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ y & 0 & x \\ x & y & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & x & x \\ -x & -2 & x \\ -x & -x & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & 1 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & 1 & x & x^2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d) } A = \begin{bmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

- 17) (SS) Sean A y B matrices de 3×3 . Verifica que

$$\text{a) } \det A = \det(A^T).$$

$$\text{b) } \det(AB) = (\det A)(\det B).$$

$$\text{c) Si } A \text{ es invertible, entonces } \det A \neq 0 \text{ y } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

- 18) (SS) Verifica que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ a & 1 & x & x^2 \\ p & b & 1 & x \\ q & r & c & 1 \end{bmatrix} = (1 - ax)(1 - bx)(1 - cx).$$

- 19) (SS) Expandiendo a lo largo de la primera columna, verifica que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 + (-1)^{n+1},$$

Actividad de Aprendizaje 8.2.27 (Continuación)

si la matriz es de $n \times n$ y $n \geq 2$.

20) (SS) Considera la matriz en bloques $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, donde A y D son matrices cuadradas y A es no singular.

a) Determina el producto $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

b) Usa el inciso anterior para obtener una fórmula para $\det M$ en términos de las matrices A, B, C, D y A^{-1} .

8.3. Determinantes y matrices inversas

En esta sección veremos varias propiedades de los determinantes. Una consecuencia de estas propiedades es que una matriz cuadrada A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$. Más aún, usaremos los determinantes para dar una fórmula para A^{-1} .

Comenzamos con un resultado notable (debido a Cauchy en 1812) a cerca del determinante de un producto de matrices.

Determinante de un producto de matrices (8.3.1)

Si A y B son matrices de $n \times n$, entonces $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Más generalmente, si $A_1, A_2, \dots, A_k$, son matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces

$$\det(A_1 A_2 \cdots A_k) = (\det A_1)(\det A_2) \cdots (\det A_k).$$

En particular, si $A = A_1 = A_2 = \cdots = A_k$, entonces $\det(A^k) = (\det A)^k$.

Si A es una matriz invertible de orden n , entonces $AA^{-1} = I_n$, lo cual implica que $\det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$. De acuerdo con la Propiedad (8.3.1), tenemos que $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$, por lo que $\det A \neq 0$. El siguiente criterio de invertibilidad, muestra que el recíproco también es cierto.

Criterio de invertibilidad del determinante (8.3.2)

Una matriz A de $n \times n$ es invertible o no singular si y solo si $\det A \neq 0$. En otras palabras, A no es invertible si y solo si $\det A = 0$.

En particular, si A es invertible, entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}. \quad (8.2)$$

Ejemplo 8.3.3

¿Para qué valores de c la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -c \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2c & -4 \end{bmatrix}$ es invertible?

Solución. De acuerdo con el Criterio de invertibilidad del determinante (8.3.2), A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$. Calcularemos $\det A$ sumando primero c veces la columna 1 a la columna 3 y, después, usando el desarrollo por cofactores a lo largo del primer renglón. El resultado es

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -c \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2c & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1-c \\ 0 & 2c & -4 \end{vmatrix} = 2(c+2)(c-3).$$

Como $\det A = 0$ si y solo si $(c+2)(c-3) = 0$, concluimos que A es invertible si y solo si $c \neq -2$ y $c \neq 3$. ■

Ejemplo 8.3.4

En el Ejemplo 6.5.11, vimos que si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño y cada una es invertible, entonces el producto AB también es una matriz invertible. ¿Será cierto el recíproco? Esto es, si el producto AB es una matriz invertible, siendo A y B matrices cuadradas del mismo tamaño, ¿podemos asegurar que A y B son matrices invertibles? Justificar la respuesta.

Solución. Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño y el producto AB es invertible, entonces por el Criterio de invertibilidad del determinante (8.3.2), tenemos que $\det(AB) \neq 0$. Además, tenemos que $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ por la Propiedad (8.3.1), por lo que $(\det A)(\det B) \neq 0$. Esto significa que $\det A \neq 0$ y $\det B \neq 0$. Por lo tanto, nuevamente por el Criterio de invertibilidad del determinante (8.3.2), concluimos que A y B son invertibles. ■

Ejemplo 8.3.5

Determinar si hay una matrix no singular A tal que $A^4 = ABA^2 + 2A^3$,

donde $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

Solución. Si $A^4 = ABA^2 + 2A^3 = A(B + 2I)A^2$, entonces

$$\det(A^4) = \det(A(B + 2I)A^2).$$

Luego, por la Propiedad (8.3.1) tenemos que

$$(\det A)^4 = (\det A)(\det(B + 2I))(\det A)^2,$$

esto es, $(\det A)^3[(\det A) - (\det(B + 2I))] = 0$. De aquí se sigue que $\det A = 0$ o $\det A = \det(B + 2I)$.

Desarrollando por cofactores a lo largo del segundo renglón en la matriz $B + 2I$, obtenemos que

$$\det(B + 2I) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Esto significa que $\det A = 0$ y, por el Criterio de invertibilidad del determinante (8.3.2), concluimos que A no es invertible. ■

Determinante de la transpuesta (8.3.6)

Sea A una matriz cuadrada.

- 1) Si A no es invertible, entonces tampoco lo es A^T (ver la Propiedad (6.5.13)-5)). Luego, por el Criterio de invertibilidad del determinante (8.3.2), concluimos que $\det A = 0 = \det(A^T)$.

- 2) Si A es invertible, entonces $A = E_s \cdots E_2 E_1$ donde cada matriz E_i es elemental (ver el Criterio de invertibilidad por matrices elementales (6.7.23)). Luego, $A^T = E_1^T E_2^T \cdots E_s^T$ y, por la Propiedad (8.3.1) y la Observación 8.2.19, obtenemos que

$$\begin{aligned} \det A^T &= (\det E_1^T)(\det E_2^T) \cdots (\det E_s^T) \\ &= (\det E_1)(\det E_2) \cdots (\det E_s) \\ &= (\det E_s) \cdots (\det E_2)(\det E_1) \\ &= \det A. \end{aligned}$$

De 1) y 2) concluimos que

$$\det A = \det A^T. \quad (8.3)$$

Ejemplo 8.3.7

Si $\det A = 2$ y $\det B = 5$, evaluar $\det(A^3 B^{-1} A^T B^2)$.

Solución. Aplicando la Propiedad (8.3.1), la relación (8.2) y la relación (8.3), tenemos que

$$\begin{aligned} \det(A^3 B^{-1} A^T B^2) &= \det(A^3) \det(B^{-1}) \det(A^T) \det(B^2) \\ &= (\det A)^3 \left(\frac{1}{\det B} \right) (\det A)(\det B)^2 \\ &= 2^3 \left(\frac{1}{5} \right) (2)(5^2) \\ &= 80. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 8.3.8

Una matriz cuadrada se llama **ortogonal** si $A^{-1} = A^T$. Determinar los valores posibles del determinante de una matriz ortogonal.

Solución. Si A es una matriz ortogonal de $n \times n$, entonces $I_n = AA^T$. Tomando determinantes y aplicando la Propiedad (8.3.1) junto con la relación (8.3), obtenemos que

$$1 = \det I_n = \det(AA^T) = (\det A)(\det A^T) = (\det A)^2.$$

Como $\det A$ es un número, concluimos que $\det A = \pm 1$. ■

En el Ejercicio 9 de la Sección 7.1 definimos la **adjunta** de una matriz de 2×2 , $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, como la matriz $\text{adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Si A es no singular, de acuerdo con (8.1.1)-b) tenemos que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A. \quad (8.4)$$

A continuación definiremos la matriz adjunta de una matriz cuadrada arbitraria y veremos que la fórmula (8.4) para la inversa sigue siendo válida (cuando la matriz es invertible).

Recordemos que el (i, j) -cofactor $c_{i,j}(A)$ de una matriz cuadrada A es un número definido por cada posición (i, j) en la matriz.

Matriz de cofactores y matriz adjunta (8.3.9)

Si A es una matriz cuadrada, la **matriz de cofactores** de A se define como la matriz $[c_{i,j}(A)]$ cuya entrada (i, j) es el (i, j) -cofactor de A .

La matriz **adjunta** de A , denotada por $\text{adj } A$, se define como la matriz transpuesta de la matriz de cofactores de A . En símbolos

$$\text{adj } A = [c_{i,j}(A)]^T.$$

Observación 8.3.10

Se deja al lector cerciorarse que la definición de matriz adjunta de una matriz de orden 2, es un caso particular de la definición de matriz adjunta de una matriz cuadrada arbitraria.

Ejemplo 8.3.11

Determinar la matriz adjunta de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ y las matrices $A(\text{adj } A)$ y $(\text{adj } A)A$.

Solución. Primero vamos a determinar la matriz de cofactores de A .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_{1,1}(A) & c_{1,2}(A) & c_{1,3}(A) \\ c_{2,1}(A) & c_{2,2}(A) & c_{2,3}(A) \\ c_{3,1}(A) & c_{3,2}(A) & c_{3,3}(A) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 37 & -10 & 2 \\ -9 & 3 & 0 \\ 17 & -5 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, la matriz adjunta de A es la transpuesta de esta matriz de cofactores.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 37 & -10 & 2 \\ -9 & 3 & 0 \\ 17 & -5 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 37 & -9 & 17 \\ -10 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El cálculo de $A(\text{adj } A)$ es

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37 & -9 & 17 \\ -10 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3I_3.$$

De manera análoga, podemos verificar que también $(\text{adj } A)A = 3I_3$. Más aún, es fácil ver que $\det A = 3$.

De esta manera, tenemos que $A(\text{adj } A) = (\det A)I_3 = (\text{adj } A)A$. ■

Los resultados obtenidos en el Ejemplo 8.3.11 son válidos con cualquier matriz cuadrada A , como se indica a continuación.

Fórmula de la adjunta (8.3.12)

Si A es una matriz de $n \times n$, entonces

$$A(\text{adj } A) = (\det A)I_n = (\text{adj } A)A.$$

En particular, si $\det A \neq 0$, la inversa de A está dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A. \quad (8.5)$$

Observación 8.3.13

Es importante señalar que la relación (8.5) para determinar A^{-1} en (8.3.12) no es una forma eficiente de calcular la inversa de una matriz. Por ejemplo, si A es una matriz de 10×10 , el cálculo de $\text{adj } A$ requeriría calcular $10^2 = 100$ determinantes de matrices de 9×9 . Por otro lado, con el Algoritmo de inversión de matrices (6.7.18) obtendríamos la matriz A^{-1} con el mismo esfuerzo con el que calculamos $\det A$.

La relación (8.5) no es práctica. Sin embargo, su virtud es que da una fórmula para A^{-1} que es útil para propósitos teóricos.

Ejemplo 8.3.14

Determinar la entrada de la posición $(2, 3)$ de A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$.

Solución. Primero calcularemos $\det A$. El resultado es

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & -7 & 11 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -7 & 11 \end{vmatrix} = 180.$$

Aplicando ahora la relación (8.5), obtenemos que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A = \frac{1}{180} [c_{ij}(A)]^T.$$

Por lo tanto, la entrada $(2,3)$ de la matriz A^{-1} es la entrada $(3,2)$ de la matriz $\frac{1}{180}[c_{i,j}(A)]$, esto es, es igual a

$$\frac{1}{180}c_{3,2}(A) = \frac{1}{180} \left(- \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right) = \frac{13}{180}.$$



Actividad de Aprendizaje 8.3.15

- 1) (S) Determina todos los números reales x tales que la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 0 & 7+x & -3 \\ 0 & 4 & x \end{bmatrix} \text{ sea no singular.}$$

- 2) (S) Determina todos los números reales x tales que $A = \begin{bmatrix} 1 & x & x \\ 1 & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$ sea invertible y determina A^{-1} para esos valores de x .

- 3) (S) Usa la Fórmula de la adjunta (8.3.12) para determinar la entrada $(2,3)$ de la matriz A^{-1} si

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$

- 4) (SA) En el intervalo $(\pi/2, \pi)$ determina el valor de x tal que la matriz $\begin{bmatrix} 2\sin x & 3 \\ 1 & 2\sin x \end{bmatrix}$ no sea invertible.

- 5) (SA) Sean A y B matrices de orden 3 tales que $\det A = 2$ y $AB = 2I_3$. Determina $\det B$.

- 6) (SA) Si $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ y $\det(A^3) = 125$, determina todos los valores posibles de a .

- 7) (SA) Sean A y B matrices de orden 3. Si $\det(2A^{-1}) = -4$ y $\det(A^3(B^{-1})^T) = -4$, determina $\det A$ y $\det B$.

- 8) (SA) Sean A , B y C matrices de orden n tales que $\det A = -1$, $\det B = 2$ y $\det C = 3$. Evalúa $\det(A^3BC^TB^{-1})$ y $\det(B^2C^{-1}AB^{-1}C^T)$.

- 9) (SA) Sean A y B matrices de orden n . Se dice que A y B son **semejantes** si hay una matriz no singular S tal que $S^{-1}AS = B$. Si A y B son matrices semejantes, ¿qué relación hay entre $\det A$ y $\det B$?

Actividad de Aprendizaje 8.3.15 (Continuación)

- 10) (SA) Sea A una matriz cuadrada. Explica qué se puede decir a cerca de $\det A$ si $A^2 = A$.
- 11) (SA) Si A y B son matrices de $n \times n$, determina si $\det AB = \det BA$.
- 12) (SA) Si $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ determina la matriz $\text{adj } A$.
- 13) (SA) Si A es una matriz de 3×3 y $\det A = 2$, determina el valor de $\det(A^{-1} + 4 \text{adj } A)$.
- 14) (SA) Si A es una matriz invertible de 3×3 , determina el valor de $\det(-A^2(\text{adj } A)^{-1})$.
- 15) (SS) Sea A una matriz de $n \times n$ con $n \geq 2$. Si A tiene una columna de ceros, determina los posibles valores para el rango de la matriz $\text{adj } A$.
- 16) (SS) Sean A y B matrices de $n \times n$ tales que $AB = -BA$. Si n es un entero impar, explica por qué alguna de las matrices A o B no es invertible.
- 17) (SS) Sea n un entero positivo impar. Determina si hay una matriz real A de orden n tal que $A^2 + I = 0$, donde I denota la matriz identidad de orden n y 0 denota la matriz cero de orden n .
- 18) (SS) Si A y B son matrices de orden n , determina si es cierto o es falso que $\det(A + B^T) = \det(A^T + B)$. Justifica tu respuesta.
- 19) (SS) Si A es una matriz de $n \times n$ y c es un número real o complejo, determina una expresión para $\text{adj}(cA)$ en términos de n , c y $\text{adj } A$.
- 20) (SS) Sean A y B matrices invertibles de 3×3 . Verifica que
 - a) $\det(\text{adj } A) = (\det A)^2$.
 - b) $\text{adj}(\text{adj } A) = (\det A)A$.
 - c) $\text{adj}(A^{-1}) = (\text{adj } A)^{-1}$.
 - d) $\text{adj}(A^T) = (\text{adj } A)^T$.
 - e) $\text{adj}(AB) = (\text{adj } B)(\text{adj } A)$.
- 21) (SS) Sean a , b y c números reales positivos y distintos. Usa el Criterio de invertibilidad del determinante (8.3.2), para determinar si la siguiente matriz es invertible.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ bc & ac & ab \\ b & c & a \end{bmatrix}.$$

8.4. Regla de Cramer

La relación (8.5) que vimos en la Fórmula de la adjunta (8.3.12), tiene una bonita aplicación en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Supongamos que $Ax = b$ es un sistema de n ecuaciones lineales en n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. Si $\det A \neq 0$, podemos despejar x multiplicando por la izquierda por la matriz A^{-1} . El resultado es $x = A^{-1}b$. Utilizando la fórmula de la adjunta, podemos reescribir la igualdad anterior en la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A) b$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} c_{1,1}(A) & c_{2,1}(A) & \cdots & c_{n,1}(A) \\ c_{1,2}(A) & c_{2,2}(A) & \cdots & c_{n,2}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,n}(A) & c_{2,n}(A) & \cdots & c_{n,n}(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

De aquí, obtenemos las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\det A} [b_1 c_{1,1}(A) + b_2 c_{2,1}(A) + \cdots + b_n c_{n,1}(A)], \\ x_2 &= \frac{1}{\det A} [b_1 c_{1,2}(A) + b_2 c_{2,2}(A) + \cdots + b_n c_{n,2}(A)], \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{\det A} [b_1 c_{1,n}(A) + b_2 c_{2,n}(A) + \cdots + b_n c_{n,n}(A)]. \end{aligned}$$

Observemos que la cantidad $b_1 c_{1,1}(A) + b_2 c_{2,1}(A) + \cdots + b_n c_{n,1}(A)$ que aparece en la relación para x_1 , se parece a la expansión por cofactores del determinante de una matriz. Los cofactores involucrados son $c_{1,1}(A), c_{2,1}(A), \dots, c_{n,1}(A)$, correspondientes a la primera columna de A . Si A_1 se obtiene a partir de A reemplazando la primera columna de A por el vector columna b , entonces para cada $i = 1, \dots, n$, tenemos que $c_{i,1}(A_1) = c_{i,1}(A)$, ya que la primera columna de A se borra cuando se calculan los cofactores. Luego, desarrollando $\det(A_1)$ a lo largo de la primera columna, obtenemos que

$$\begin{aligned} \det A_1 &= b_1 c_{1,1}(A_1) + b_2 c_{2,1}(A_1) + \cdots + b_n c_{n,1}(A_1) \\ &= b_1 c_{1,1}(A) + b_2 c_{2,1}(A) + \cdots + b_n c_{n,1}(A) \\ &= (\det A) x_1, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$. Resultados análogos se obtienen para las otras variables. A continuación resumimos esta información.

Regla de Cramer (8.4.1)

Si $\det A \neq 0$, la única solución del sistema $Ax = b$ de n ecuaciones lineales en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, está dada por

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A},$$

donde, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, A_i es la matriz obtenida de A reemplazando la columna i por el vector columna b .

Ejemplo 8.4.2

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2, \\ 3x_2 - 4x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Solución. La matriz de coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ y el vector de términos constantes es $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Reemplazando las columnas 1, 2 y 3 de A por el vector b , obtenemos las matrices A_1 , A_2 y A_3 , respectivamente, esto es,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Evaluando los determinantes, obtenemos que $\det A = 12$, $\det A_1 = 21$, $\det A_2 = 0$ y $\det A_3 = -9$. Como $\det A \neq 0$, aplicando la Regla de Cramer (8.4.1), obtenemos la única solución del sistema dada por $x_1 = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$, $x_2 = \frac{0}{12} = 0$ y $x_3 = \frac{-9}{12} = -\frac{3}{4}$. ■

Ejemplo 8.4.3

Determinar el valor de x_1 , dado el siguiente sistema de ecuaciones.

$$5x_1 + x_2 - x_3 = 4,$$

$$9x_1 + x_2 - x_3 = 1,$$

$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 2.$$

Solución. Primero vamos a determinar los determinantes de la matriz de coeficientes A y de la matriz A_1 obtenida al reemplazar la primera columna de A por el vector de términos constantes. El resultado es

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 9 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = -16,$$

$$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = 12.$$

Aplicando la Regla de Cramer (8.4.1), obtenemos que $x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = -\frac{3}{4}$. ■

Observación 8.4.4

La Regla de Cramer no es una forma eficiente de resolver un sistema de ecuaciones lineales. Es cierto que nos permitió calcular el valor de x_1 sin tener que calcular los valores de x_2 y de x_3 en el Ejemplo 8.4.3. Sin embargo, aunque esto puede parecer una ventaja, la cuestión es que, para sistemas de ecuaciones lineales grandes, el número de cálculos necesarios para determinar las soluciones utilizando el algoritmo de eliminación gaussiano, es comparable con el número requerido para determinar uno de los determinantes involucrados en la Regla de Cramer. Más aún, el algoritmo de Gauss funciona cuando la matriz del sistema no es invertible e incluso cuando la matriz de coeficientes no es cuadrada. Entonces, al igual que la fórmula de la adjunta, la Regla de Cramer no es práctica. Su virtud es teórica.

Ejemplo 8.4.5 Una aplicación teórica de la Regla de Cramer

Sea A una matriz de $n \times n$ tal que $\det A \neq 0$. Consideremos las matrices

$e_1, e_2, \dots, e_n$ de $n \times 1$ definidas por

$$[e_k]_{i1} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{si } k \neq i, \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, n$.

Por ejemplo, si $n = 2$, entonces $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; si $n = 3$, entonces

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Cada uno de los sistemas $Ax = e_1, Ax = e_2, \dots, Ax = e_n$, tiene solución única de acuerdo con la Regla de Cramer (8.4.1). Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ las respectivas soluciones de los sistemas anteriores. Con estas soluciones formemos la matriz $B = [x_1 \mid x_2 \mid \dots \mid x_n]$. Entonces, tenemos que

$$AB = A[x_1 \mid x_2 \mid \dots \mid x_n] = [Ax_1 \mid Ax_2 \mid \dots \mid Ax_n] = [e_1 \mid e_2 \mid \dots \mid e_n] = I_n,$$

lo que significa que la matriz A es invertible, según la Propiedad (7.3.11). Este ejemplo muestra que si $\det A \neq 0$, entonces A es invertible.

Actividad de Aprendizaje 8.4.6

Utiliza la Regla de Cramer en todos los ejercicios de esta actividad de aprendizaje.

1. (S) Si $ad - bc \neq 0$, determina la única solución del sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= r, \\ cx + dy &= s. \end{aligned}$$

2. (S) Determina las soluciones x_1, x_2, x_3 del sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 &= 9, \\ 21x_1 + 22x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Actividad de Aprendizaje 8.4.6 (Continuación)

3. (S) Determina las soluciones del sistema de ecuaciones

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2,$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4.$$

4. (SA) Explica por qué no se puede utilizar la Regla de Cramer (8.4.1) para resolver el siguiente sistema de ecuaciones. Después resuelve el sistema utilizando el método de eliminación gaussiana.

$$x + 3y - 6z = -23,$$

$$-2y + 4z = 14,$$

$$5x + 8y - 16z = -66.$$

5. (SA) Dado el vector $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, determina un vector $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

6. (SS) Determina todos los números reales k tales que el siguiente sistema de ecuaciones tenga solución única y determina también la solución única para los valores de k encontrados.

$$x - 2y + k = k + 4,$$

$$(k - 1)x + y + z = k - 3,$$

$$-kx + 2y - 2z = -10.$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] T. Andreescu, D. Andrica. *Complex Numbers from A to ... Z*. Birkhäuser, 2005.
- [2] Baldor. *Álgebra*. Grupo Editorial Patria, tercera edición, 2017.
- [3] E. J. Barbeau. *Polynomials*. Problem Books in Mathematics, Springer, 2003.
- [4] Bittinger, Ellenbogen, Johnson. *Intermediate Algebra: Concepts and Applications*. Pearson, 2012.
- [5] R. Churchill. *Complex variables and applications*. McGraw-Hill, séptima edición, 2003.
- [6] I. N. Herstein, David J. Winter. *Matrix Theory and Linear Algebra*. Macmillan Publishing Company, 1988.
- [7] J. Kaufmann, K. Schwitters. *College Algebra*. Brooks Cole, séptima edición, 2008.
- [8] W. Keith Nicholson. *Linear Algebra with Applications*. Open Edition, Base Textbook, Version 2019 - Revision A.
- [9] J. A. Lara Rodríguez, C. J. Rubio Barrios. *Álgebra Superior*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Yucatán, México, 2017.
- [10] J. A. Lara Rodríguez, C. J. Rubio Barrios. *Álgebra Lineal*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Yucatán, México, 2011.
- [11] R. Larson. *Intermediate Algebra*. Quinta edición, Brooks/Cole, 2010.
- [12] C. Lehmann. *Álgebra*. Limusa Noriega, tercera edición, 2011.

- [13] V. Litvinenko, A. Mordkóvich. *Prácticas para resolver problemas matemáticos (Álgebra y trigonometría)*. Editorial Mir, Moscú, 1989.
- [14] *Manual de preparación pre-universitaria, Álgebra*. Lexus Editores S.A. 2008.
- [15] R. Rusczyk. *Introduction to Algebra*. The Art of Problem Solving, 2007.
- [16] R. Rusczyk, D. Patrick, R. Boppana. *Prealgebra*. The Art of Problem Solving, 2011.
- [17] R. Rusczyk, M. Crawford. *Intermediate Algebra*. The Art of Problem Solving, 2008.
- [18] M.R. Spiegel. *Álgebra Superior*. McGraw-Hill, 1992.

ÍNDICE DE PALABRAS

- D'Moivre
 - fórmula de, 138
- determinante
 - de una matriz de 2×2 , 309
 - de una matriz de 3×3 , 316
 - de una matriz de orden n , 318
- ecuación
 - cuadrática, 63
 - de segundo grado, 63
 - exponencial, 171
 - exponencial logarítmica, 198
 - exponencial potencial, 175
 - irracional, 85
 - logarítmica, 191
 - racional, 70
- ecuación cuadrática
 - con dos incógnitas, 147
 - discriminante de una, 64
 - fórmula general para resolver una, 64
- ecuación general
 - de las cónicas, 147
- expresión racional, 45
 - reducida, 46
 - simplificada, 46
- expresiones racionales
 - división de, 49, 51
 - fracción compleja, 59
 - multiplicación de, 49
 - suma y resta de, 54
- factorización, 18
 - de un trinomio cuadrado perfecto, 26
 - de una diferencia de cuadrados, 23
 - de una diferencia de cubos, 35
 - de una suma de cubos, 35
 - por agrupación de términos, 20
 - por el método del aspa simple, 31
 - por factor común, 18
- forma escalonada
 - reducida por renglones, 266
- forma escalonada de una matrix, 262
- forma Normal de Smith, 273
- función
 - exponencial, 167
 - logarítmica, 179
- método de eliminación de
 - Gauss, 264
 - Gauss-Jordan, 266
- matrices
 - multiplicación de, 223

- semejantes, 337
- suma de, 212
- matriz, 203
 - adjunta, 314, 333, 334
 - fórmula de la, 335
 - antisimétrica, 220
 - aumentada, 285, 288
 - bloques de una, 233
 - cero, 206
 - combinación lineal, 217
 - compañera, 328
 - conjugada, 212
 - cuadrada, 205
 - de coeficientes, 285, 288
 - de cofactores, 334
 - de Hadamard, 232
 - diagonal, 206
 - diagonal principal de una, 205
 - elemental, 252
 - idempotente, 248
 - identidad, 206
 - inversa de una, 240
 - invertible, 240
 - no singular, 240
 - nula, 206
 - ortogonal, 333
 - partición de una, 233
 - rango de una, 268
 - simétrica, 219
 - transpuesta de una, 208
 - traza de una, 210
 - triangular inferior, 206
 - triangular superior, 206
- número complejo, 93
 - argumento de un, 130
 - argumento principal de un, 131
 - conjugado de un, 113
 - forma algebraica de un, 100
 - forma polar de un, 131
 - identidad multiplicativa, 99
 - inverso aditivo de un, 94
 - inverso multiplicativo de un, 100
 - módulo de un, 119
 - magnitud de un, 119
 - neutro aditivo, 96
 - parte imaginaria de un, 93
 - parte real de un, 93
 - raíz n -ésima de un, 141
- números complejos
 - división de, 109
 - igualdad de, 93
 - multiplicación de, 98
 - resta de, 94
 - suma de, 94
- operación elemental
 - de columna, 250
 - de renglón, 250
- pivote, 262
- polinomio
 - cúbico, 2
 - característico, 314
 - cero, 1
 - cero de un, 3
 - coeficiente de un, 1
 - coeficiente principal de un, 1
 - constante, 2
 - cuártico, 2
 - cuadrático, 2
 - lineal, 2
 - mónico, 2
 - monomio, 7
 - quintico, 2
 - raíz de un, 3
 - simétrico elemental en dos variables, 160
 - simétrico en dos variables, 160
 - término constante de un, 1
- polinomios
 - máximo común divisor de, 38
 - mínimo común múltiplo de, 38
 - producto de, 7
 - resta de, 4
 - suma de, 3
- producto de Kronecker, 239
- producto notable

binomio al cuadrado, 14
 binomio al cubo, 14
 producto de binomios conjugados,
 14, 23

regla

de Cramer, 339
 de Sarrus, 316

sistema de ecuaciones

cuadrático, 148
 lineal-cuadrático, 149
 lineales
 consistente, 289
 determinado, 289
 homogéneo, 288
 inconsistente, 289
 indeterminado, 289
 simétrico, 161

sistemas de ecuaciones lineales

equivalentes, 293
 método de eliminación de Gauss,
 295
 método de eliminación de Gauss-
 Jordan, 303

variables

básicas, 296, 304
 libres, 296, 304

vector

columna, 205
 de términos independientes, 285, 288
 renglón, 205

Vieta

fórmulas de, 66